Nro. 18

Serie C

COLOQUIOS SOBRE MATEMÁTICA EDUCATIVA 2005

Parte 2

Mariano González Jorge Luis Bazán
Roy Sánchez

San Miguel, Febrero del 2006

Departamento de Ciencias
Sección Matemática
Pontificia Universidad Católica del Perú
Apartado 1761
Lima-Perú

II

PRÓLOGO

Los *Reportes de Investigación* son publicaciones que la Sección Matemáticas viene desarrollando para difundir oportunamente los resultados o avances de trabajos de investigación de sus profesores, o de actividades desarrolladas en la Sección, encaminadas a la búsqueda de resultados. Estas publicaciones se vienen realizando desde el primer semestre de 1998 y consta de 4 series: Investigación avanzada (serie A), Divulgación-Aplicación (serie B), Educación Matemática (serie C) y Tesis (serie D).

En esta publicación se inaugura la serie C, correspondiente a Educación Matemática, con la presentación de contribuciones de diferentes profesores de la Sección, así como contribuciones de otros profesores participantes de las actividades del IREM, interesados en la mejora de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en todos los niveles educativos.

IREM corresponde a las siglas de Institut de Recherche por l'Enseignement des Mathematiques. Estos Institutos de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas fueron creados en Francia en la década del 70 y desde entonces vienen desarrollando investigaciones y actividades para favorecer el mejoramiento de la calidad de la educación matemática no sólo en Francia, sino también en otros países donde se han creado IREMs, constituyendo una red académica internacional. En nuestro país, con sede en la Pontificia Universidad Católica del Perú, se ha creado un IREM, por acuerdo del Consejo Universitario del 25 de octubre del 2000 y fue nombrado como Director el Magíster en Matemáticas, Profesor Uldarico Malaspina Jurado.

El IREM-PUCP desarrolló con éxito, del 16 al 18 de agosto de 2005 en el Campus de la PUCP los *Coloquios Sobre Matemática Educativa 2005*. Esta actividad congregó alrededor de cien profesores entre docentes de secundaria y de nivel superior, quienes respondieron satisfactoriamente a la convocatoria realizada. Cada día del evento tuvo una primera parte dedicada a desarrollar tres talleres simultáneos, una segunda a sesiones simultáneas de socialización de experiencias, y finalmente una conferencia plenaria

El Taller 1, denominado Resolución de problemas y aprendizaje activo, estuvo a cargo de los profesores Emilio Gonzaga y Uldarico Malaspina. En este taller se trabajaron problemas no rutinarios de matemática, adecuados para ser resueltos en grupo. Se diseñaron actividades individuales y grupales para que cada participante, a través del análisis de la situación, de la interacción con sus compañeros y de las orientaciones de los animadores del taller, desarrollara estrategias propias para aproximarse a la solución y viviera la experiencia de usar la resolución de problemas para avanzar en la formación del pensamiento matemático.

El Taller 2, denominado, *Situaciones didácticas con geometría dinámica*, estuvo a cargo de los profesores Mariano González y Roy Sánchez. En este taller, se presentaron diversas situaciones didácticas sobre Geometría Euclidiana, Geometría Analítica (énfasis en lugares geométricos) y optimización, en diversos niveles educativos, usando el software Cabri-Gèométre. Cada participante contó con una computadora y desarrolló actividades que le permitieron comprobar como, en un ambiente de geometría dinámica, se puede modificar la actividad geométrica y las formas de enseñanza y de aprendizaje.

El Taller 3 se denominó *Tendencias actuales sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, dirigido por las profesoras Cecilia Gaita y Norma Rubio. En este taller se presentaron los principales resultados de investigaciones realizadas en los últimos años en países como Francia, España y México referidos al estudio de las concepciones de los alumnos sobre los conceptos de función, límite y derivada, así como propuestas didácticas para ser implementadas en el aula. La experiencia se desarrolló con un trabajo activo de los participantes, a quienes se les presentaron situaciones que les permitieron reflexionar sobre las dificultades a las que se enfrentan los alumnos en el tratamiento de estos temas y que, en la mayoría de los casos, pasan desapercibidas.

En esta publicación, los autores de los talleres comparten con la comunidad académica los aspectos más significativos de su trabajo.

Para las sesiones de *Socialización de experiencias innovadoras en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* fueron seleccionados los trabajos de doce profesores de matemáticas de distintos niveles educativos para compartir innovadoras experiencias didácticas relacionadas con la matemática y así contribuir a la reflexión, estimular el estudio y la investigación y enriquecerse con los comentarios que se suscitaron. Algunos de estos trabajos son compartidos en esta publicación.
Las Conferencias Plenarias estuvieron a cargo de tres profesores de la Sección. La primera, denominada La estadística llega a la escuela: problemas y posibilidades fue dada por Jorge Bazán, Coordinador de la Maestría en Estadística. La segunda Conferencia Uso de las TICs para el aprendizaje de las matemáticas: presencial y a distancia estuvo a cargo de Haydée Azabache, Directora Adjunta del IREM-Lima, y Directora de PUCP VIRTUAL; y la tercera, Problemas: oportunidades de aprendizaje para alumnos y profesores estuvo a cargo de Uldarico Malaspina Jurado, Director del IREM – Perú. Parte de estas conferencias son también presentadas en forma de artículo en esta publicación.

Todos estos trabajos aparecen en dos volúmenes de la serie C. Estos volúmenes son: Coloquios sobre matemática educativa 2005 parte 1*, editado por los profesores de la Sección Uldarico Malaspina, Cecilia Gaita, Emilio Gonzaga y Norma Rubio, y* Coloquios sobre matemática educativa 2005 parte 2*, editado por los profesores de la Sección Mariano González, Jorge Bazán y Roy Sánchez. Los invitamos a la lectura de estas contribuciones.*

Miguel Gonzaga Ramírez
Coordinador de la Sección Matemática

Lima, Febrero del 2006

CONTENIDO

PARTE 1

CONTENIDO

PARTE 2

INDICE

SITUACIONES DIDÁCTICAS CON GEOMETRÍA DINÁMICA[1]

Mariano González Ulloa[2]
Roy Sánchez Gutiérrez[3]

Resumen

Este artículo, es el resultado de un taller se desarrolló con profesores de educación secundaria y superior en los "Coloquios de Matemática Educativa" realizados en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) en el mes de agosto de 2005. El objetivo del taller fue mostrar algunas situaciones didácticas con geometría dinámica aprovechando las bondades del software Cabrí Géomètre. El taller se dividió en dos partes: en la primera se desarrolló una breve introducción al manejo del software, mostrando las distintas opciones necesarias para las construcciones que se proponían, lo cual fue posible gracias a que cada participante disponía de una computadora para realizar su trabajo. La segunda parte se dedicó a desarrollar en forma conjunta con los participantes, tres situaciones didácticas que condujeron a la solución de tres problemas de optimización sin usar el cálculo diferencial.

Palabras clave: Geometría dinámica, Cabrí Géomètre, optimización.

Introducción

---

[1] Taller

[2] Pontificia Universidad Católica del Perú . IREM – PUCP. mgonzal@pucp.edu.pe
[3] Pontificia Universidad Católica del Perú. IREM – PUCP. rwsanche@pucp.edu.pe

La teoría de las situaciones didácticas fue desarrollada por Guy Brousseau (Brousseau, G., 1998) , quién define una situación didáctica como:
"Un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor con un fin de permitir a los alumnos aprender, es decir reconstruir algún conocimiento. Para que el alumno construya el conocimiento es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. La resolución del problema se vuelve entonces responsabilidad del alumno, que debe hacerse cargo de obtener un cierto resultado. El análisis del comportamiento del alumno se realiza a través de las variables de la situación donde se produce este comportamiento. Cuando el estudiante se interesa personalmente en la situación, se dice que se ha conseguido la devolución de la situación al alumno".

Apoyándonos en parte de esta teoría desarrollamos actividades en geometría dinámica usando el software Cabrí Géomètre. En este marco encontramos que la geometría dinámica es una excelente posibilidad para introducir conceptos y obtener resultados relacionados con otras áreas debido a que permite:

- Visualizar situaciones en forma global configurando relaciones entre distintos elementos.
- Agilizar la gran cantidad de manipulaciones de objetos que realizadas manualmente retrasarían notablemente el proceso conceptual subyacente en el problema tratado.
- Vincular las relaciones existentes entre objetos geométricos con las relaciones numéricas.
- Plantear conjeturas y verificarlas.
- Visualizar lugares geométricos generados mediante el desplazamiento de puntos que satisfacen ciertas condiciones. Hecho que muchas veces no es fácil de observar por la complejidad del conjunto generado.

- Revisar paso a paso las construcciones. Permitiendo la corrección de errores (en “tiempo real”) que puedan afectar el resultado final o mejorar las construcciones considerando un menor número de pasos. De esta manera se tiene el proceso para obtener la solución del problema y no solamente el resultado final.
- Animar las configuraciones y observar los distintos cambios que se originan hasta llegar a la solución del problema.
- Construir animaciones que se pueden colocar en la Web en forma de applets para que el usuario pueda revisarlas en el momento que desee.

Las situaciones didácticas con geometría dinámica intentan convertir el ambiente de trabajo en un pequeño “laboratorio” a través de modelaciones geométricas de problemas, previas a su formulación y verificación. Si bien es cierto que la geometría dinámica proporciona una manera de obtener resultados de forma “experimental”, no se debe perder de vista que tales resultados, así obtenidos, deben ser probados usando los argumentos teóricos matemáticos. Razón por la cual, al final de cada problema que presentamos, damos la justificación matemática de la solución correspondiente.

Justificación

El constante desarrollo de nuevas tecnologías y la rapidez con la que se trasmite la información en nuestros tiempos ha llevado al docente a plantearse nuevas estrategias metodológicas para desempeñar en forma más eficiente su labor.

Por este motivo nos planteamos, a manera de ejemplo, simular en la computadora la solución de algunos problemas de optimización sin el uso de Cálculo Diferencial sino recurriendo a herramientas matemáticas desarrolladas a nivel medio (relaciones algebraicas básicas), porque en nuestro país

los programas curriculares de nivel secundario no incluyen nociones de derivadas.
Los principales objetivos de este taller fueron los siguientes:

- Crear situaciones didácticas con geometría dinámica para resolver algunos problemas de optimización.
- Representar gráficamente los problemas y sus soluciones aprovechando las bondades dinámicas del software.
- Mostrar el uso del software Cabrí Géomètre como una herramienta que permita reforzar los conocimientos de los temas de Geometría Euclidiana, Geometría Analítica y optimización en diversos niveles educativos.

Desarrollo

El taller se desarrolló en dos partes:

Primera parte.- Introducción al uso de Cabrí Géomètre
Con la finalidad de que todos los participantes adquieran los conocimientos básicos del software se desarrollaron tres actividades previas al tratamiento de los problemas a estudiar. En el desarrollo de cada actividad se dio una secuencia de pasos a seguir para manipular los objetos geométricos usados en la construcción correspondiente. Se considera un objeto en Cabrí Géomètre a un segmento, a una recta, a una circunferencia, etc.

Actividad 1.- Se planteó la construcción de un segmento de recta conociendo su longitud, la construcción de una circunferencia de radio dado y finalmente, la construcción de dos mosaicos a partir de un polígono regular (un pentágono) y de un polígono irregular. La construcción se realizó usando la opción *Simetría axial,* tal como se muestra en la figura 1.

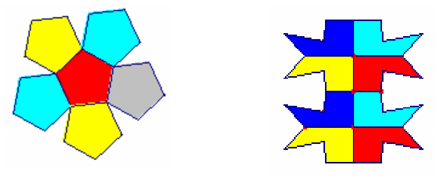


Figura 1

Actividad 2.- Ubicación de puntos en el plano cartesiano conociendo sus coordenadas.
Se desarrolló esta actividad debido a que en los problemas planteados en la segunda parte se requiere construir lugares geométricos en el plano cartesiano.

Actividad 3.- Construcción de un lugar geométrico.
Dada una circunferencia C y un punto fijo P fuera de ella, elegir un punto genérico Q de la circunferencia y nombrar con M al punto medio del segmento PQ.

a) Pedir al participante que "arrastre" con el mouse el punto Q en la circunferencia y visualice el desplazamiento del punto M.
b) Usando la opción *Lugar geométrico,* generar el lugar geométrico del punto M cuando Q se desplaza en la circunferencia C. Como se puede ver en la figura 2, se trata de una circunferencia.

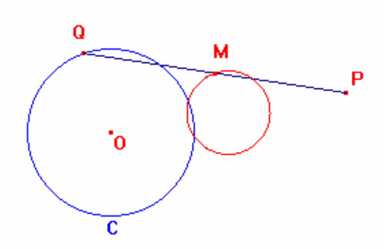


Figura 2

Luego se pide que considere algunas variantes de este problema, por ejemplo:

i) Considerar M como uno de los puntos de trisección del segmento PQ.
ii) Elegir el punto P en el interior de la circunferencia C.
iii) ¿Cuál es la condición para que el lugar geométrico obtenido en b) no intercepte a la circunferencia C?
iv) ¿Cuándo las dos circunferencias son tangentes?

Segunda parte.- Problemas de optimización

Como se dijo en la introducción, los resultados obtenidos mediante la “experimentación” hecha en la computadora, deben ser justificados. Con esta finalidad presentamos brevemente las herramientas matemáticas que nos permiten hacer tal justificación: media aritmética y media geométrica para números reales positivos.

Definición.- Sean a_1 , a_2 ,$\cdots$, a_n números reales positivos, la media aritmética de tales números es

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

y la media geométrica es

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Teorema.- Si a_1 , a_2 ,$\cdots$, a_n son números reales positivos entonces

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

La igualdad ocurre sí y sólo sí $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

El lector interesado en la prueba puede consultar Bulajich., Gómez y Valdez R. (2005).

El proceso para resolver los problemas que se presenta a continuación se dividió en cuatro etapas:

- Construir la representación gráfica de los objetos que intervienen en el problema.
- Calcular el resultado del problema para valores particulares de las condiciones dadas, aprovechando el aspecto dinámico del software.
- Generar el lugar geométrico que resulta al variar las condiciones iniciales para visualizar el valor óptimo del problema.
- Justificar rigurosamente el valor óptimo hallado en la parte anterior.

Los problemas de optimización planteados en el taller fueron los siguientes:

Problema 1

Dado un alambre de longitud L, dividirlo en dos partes, no necesariamente iguales. Construir con una de las partes un triángulo equilátero y con la otra una circunferencia. Hallar el perímetro del triángulo de manera que la suma de las áreas de las regiones limitadas por ambas figuras sea la mayor posible.

Solución.-

Usando las opciones del software se realiza la construcción del triángulo y de la circunferencia, con esta finalidad se representa el alambre como el segmento de extremos A y B para un valor particular de L y se siguen los siguientes pasos:

a) Elegir en el segmento AB un punto genérico P que representa el punto de corte (usar la opción *Punto sobre objeto* para que permita su posterior desplazamiento).

b) Representar con x la longitud del segmento AP (perímetro del triángulo), dividirlo en tres partes iguales y usando la opción *Transferencia de medidas* se construye el triángulo equilátero.

c) Medir el segmento PB y usando la fórmula de la longitud de una circunferencia se calcula el radio y luego con la opción *Transferencia de medidas* se construye la circunferencia como se muestra en la figura 3.

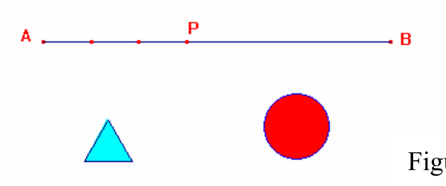


Figura 3

d) Sea $A(x)$ la suma de áreas de las regiones limitadas por las figuras construidas. Con la opción *Calcular* se determina el valor de $A(x)$ para el valor de x elegido en la parte b). Arrastrando con el mouse el punto P en el segmento AB se visualiza la variación de $A(x)$. Al mismo tiempo se genera una tabla de valores de x y $A(x)$ (Tabla 1). Como se puede observar el mayor valor de $A(x)$ se obtiene cuando x=0.

	x :	A[x]:
1	2,49	2,68
2	2,43	2,56
3	2,27	2,28
4	2,09	2,04
5	1,85	1,82
6	1,58	1,74
7	1,45	1,76
8	0,99	2,15
9	0,77	2,51
10	0,52	3,04
11	0,36	3,46
12	0,20	3,93
13	0,16	4,07
14	0,09	4,31
15	0,06	4,40
16	0,04	4,46
17	0,02	4,56
18	0,01	4,59

Tabla 1

e) Usando la opción *Lugar geométrico*, se construye el lugar geométrico de los puntos (x, $A(x)$) cuando P varía en el segmento AB ($0 \leq x \leq$ L) (Figura 4).

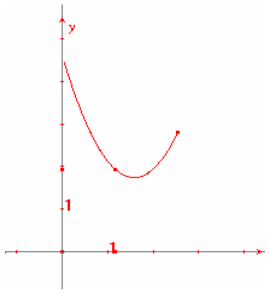


Figura 4

f) Finalmente, arrastrando con el mouse el punto B se puede obtener la solución general del problema para diferentes valores de L, que se puede visualizar en la figura 4.

Del desarrollo realizado se obtiene también el menor valor para la suma de las áreas, es decir el mínimo valor de $A(x)$.

Justificación

Siendo x (longitud del segmento AP) el perímetro del triángulo equilátero, cada uno de sus lados mide $\frac{x}{3}$, su altura $h = \frac{\sqrt{3}}{6}x$ y su área $A_t(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2$. Por otro lado, si la longitud de la circunferencia es L-x (longitud del segmento BP), su radio es $r = \frac{L-x}{2\pi}$ y el área del círculo limitado por dicha circunferencia es $A_c(x) = \frac{(L-x)^2}{4\pi}$, sumando las áreas $A(x) = A_t(x) + A_c(x)$ y reemplazando

$$
\begin{aligned}
A(x) = & \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{(L-x)^2}{4\pi} \\
= & \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{12\sqrt{3}}\right)x^2 - \frac{L}{2\pi}x + \frac{L^2}{4\pi} \\
= & a\left(x - \frac{L}{4\pi a}\right)^2 - \frac{L^2}{16\pi^2 a} + \frac{L^2}{4\pi} \\
= & a\left(x - \frac{L}{4\pi a}\right)^2 + \frac{L^2}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{4\pi\ a}\right)
\end{aligned}
$$

$$a = \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{12\sqrt{3}}$$

Como $a > 0$ el mayor valor de $A(x)$ se alcanzará cuando $x = 0$ ó $x = L$ (ver figura 4). Pero

$$A(0)=\frac{1}{4\pi}L^2 \geq \frac{1}{12\sqrt{3}}L^2 = A(L)$$

Luego el mayor valor de $A(x)$ es $\frac{L^2}{4\pi}$ y se alcanza cuando $x=0$, mientras que el menor valor de $A(x)$ es $\frac{L^2}{4\pi}(1-\frac{1}{4\pi\ a})$ y se alcanza cuando $x=\frac{L}{4\pi a}$.

Problema 2

Considerar una hoja de papel rectangular ABCD de lados *a* y *b, a<b* (Figura 5).

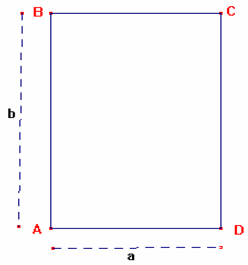


Figura 5

Doblar la hoja de manera que el vértice B “caiga” sobre el lado opuesto AD en el punto B’ formando el triángulo rectángulo PAB´ (P es el punto de doblez del lado AB). Hallar las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo PAB´ para que su área sea máxima.

Solución.-

La solución del problema la iniciamos construyendo una gráfica que simule el doblez de la hoja:

a) Considerar un valor particular tanto para *a* como para *b* (*a<b*) y construir la figura 6, teniendo cuidado de elegir el punto B’ como *Punto sobre objeto* en el segmento AD, hecho que permitirá arrastrarlo con el mouse y visualizar la variación del triángulo PAB’ (figura 6).

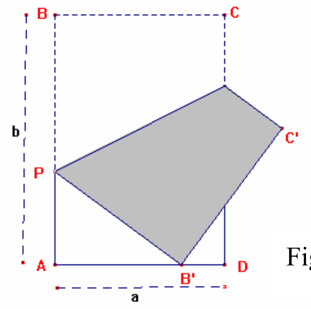


Figura 6

b) Medir los catetos para calcular el área, *A*, del triángulo PAB' (usar la opción *Calcular*)

c) Denominar *x* e *y* a las longitudes de los segmentos AB' y AP, respectivamente.

d) Arrastrando con el mouse el punto B' sobre el segmento AD, se obtienen diferentes valores para *x*, y en consecuencia para *A*.

e) Al mismo tiempo, con los valores obtenidos en la parte d) se genera una tabla de valores de *x* y de *A* como la que se muestra en la Tabla 2

	x:	Area:
1	0,11	0,16
2	0,19	0,28
3	0,37	0,56
4	0,71	1,07
5	0,93	1,38
6	1,06	1,56
7	1,22	1,78
8	1,43	2,05
9	1,75	2,44
10	1,98	2,70
11	2,14	2,86
12	2,30	3,00
13	2,51	3,17
14	2,65	3,26
15	2,80	3,36
16	2,86	3,39
17	3,07	3,48
18	3,20	3,52
19	3,36	3,55
20	3,57	3,56
21	3,81	3,52
22	3,89	3,50
23	4,13	3,39
24	4,26	3,31

Tabla 2

f) Finalmente, usando la opción *Lugar geométrico* se genera, en el plano cartesiano, el lugar geométrico de los puntos (x, A) cuando B' se desplaza sobre AD. Donde se puede observar el máximo valor de A (Figura 7).

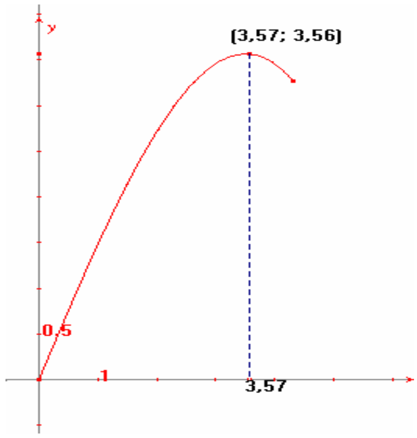


Figura 7

Arrastrando los puntos B y D es posible visualizar la solución del problema para distintas dimensiones de la hoja.

Justificación

Como x e y son las longitudes de los segmentos AB' y AP respectivamente (catetos del triángulo rectángulo PAB'), la longitud de la hipotenusa PB' es b-y. Por el teorema de Pitágoras se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (b-y)^2 \\ &= b^2 - 2by + y^2 \end{aligned}$$

De donde resulta que

$$x = \sqrt{b^2 - 2by}$$

igualdad que permite imponer las restricciones siguientes:

$$0 \le x \le a \quad , \quad 0 \le y \le \frac{b}{2}$$

Entonces el área del triángulo PAB',

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}xy \\
&= \frac{1}{2}y\sqrt{b^2-2by}
\end{aligned}
$$

ó

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \frac{1}{4}y^2(b^2-2by) \\
&= \frac{b}{4}yy(b-2y) \quad ; \text{ usando el teorema} \\
&\le \frac{b}{4}\left(\frac{y+y+b-2y}{3}\right)^3 \\
&= \frac{b^4}{4\times 27}
\end{aligned}
$$

Luego

$$
A \le \frac{b^2}{6\sqrt{3}}
$$

Así, el máximo valor de A es $\dfrac{b^2}{6\sqrt{3}}$ que se alcanza cuando $y=\dfrac{b}{3}$ de donde se tiene que $x=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$

Problema 3

En cada esquina de una lámina cuadrada de lado a se recorta un cuadrado de lado x (Figura 8). Plegando según las líneas punteadas se obtiene una caja sin tapa. ¿Para qué valor de x el volumen de la caja es máximo?

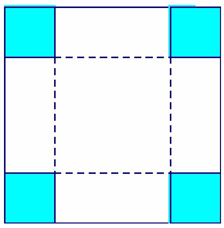


Figura 8

Solución.-

Para hacer la construcción usando el software, fijamos un valor particular para *a*.

a) Construir un cuadrado de lado *a* que representa la lámina, fijar un punto genérico P en uno de sus lados y construir cuatro cuadrados pequeños de lado *x*, uno en

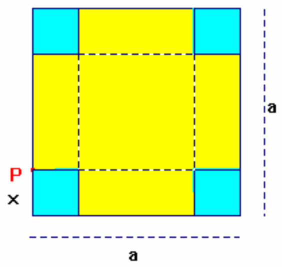


Figura 9

cada esquina de la lámina como se muestra en la figura 9. La construcción se realiza de tal manera que cuando se arrastre el punto P los lados de los cuatros cuadrados varíen simultáneamente simulando los cortes (varía el valor de *x*, $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$).

b) Hechos los cortes se simula la construcción de la caja (Figura 10). Esta operación se realiza usando la opción *transferencia de medidas.* Se transfieren las longitudes de los lados de la base (es un cuadrado de lado *a-2x*) y de la altura (*x*). Luego trazando rectas paralelas y/o perpendiculares se construye la caja cuyo volumen es

$$V(x)=(a-2x)(a-2x)\,x$$

Es importante mencionar que la simulación de los cortes está ligada con la construcción de la caja, pues, al arrastrar el punto P deben variar los cuadrados y las dimensiones de la caja.

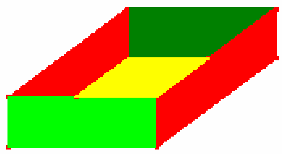


Figura 10

c) Arrastrando con el mouse el punto P, se genera una tabla de valores para *x* y *V(x)* (Tabla 3) donde se puede visualizar el máximo valor para el volumen de la caja.

	x:	V(x):
1	0,16	3,48
2	0,26	5,29
3	0,34	6,40
4	0,50	8,03
5	0,53	8,23
6	0,58	8,57
7	0,61	8,72
8	0,77	9,22
9	0,79	9,25
10	0,82	9,26
11	0,90	9,22
12	0,95	9,13
13	1,03	8,90
14	1,22	8,02
15	1,24	7,86

Tabla 3

d) Finalmente, en un sistema de coordenadas cartesianas se construye el lugar geométrico generado por los puntos *(x,V(x))* cuando se hace variar el valor de *x*.

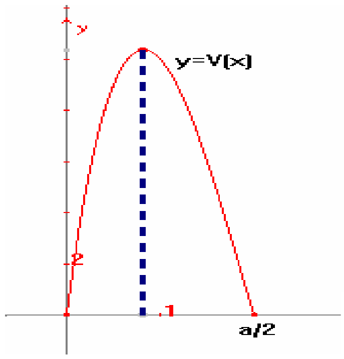


Figura 11

Una vez construidas las tres partes del modelo, se pueden mostrar simultáneamente y observar que la variación de *x* influye en el tamaño del corte, las dimensiones de la caja y por supuesto en el volumen que encierra la caja (use la opción

Animación cuando el punto P se mueve en el lado del cuadrado).

En este caso es importante hacer notar que cuando $x = 0$ no aparecerán cortes en las esquinas de la lámina, en consecuencia la caja no tiene altura (no existe caja) y el volumen será cero. También si $x = a/2$ entonces todo el material se ha cortado, no existe caja y el volumen es nuevamente cero. Sin embargo, de entre todos los valores intermedios $0 < x < \frac{a}{2}$, existirá por lo menos un valor de x para el cual $V(x)$ alcanza un valor máximo. Aquí se muestra todos estos casos, incluyendo el valor de x que origina la solución del problema.

Similar a los problemas anteriores, arrastrando con el mouse cualquiera de los vértices del cuadrado mayor se obtiene la solución del problema para distintos valores de a.

Justificación

Si x es el lado del pequeño cuadrado que se corta en cada esquina, el volumen de la caja es

$$V(x) = (a - 2x)(a - 2x)x$$

y usando la relación entre las medias aritmética y geométrica se tiene

$$\begin{aligned} V(x) &= (a-2x)(a-2x)x \\ &= 2\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)2x \quad ; \quad \text{usando el teorema} \\ &\leq 2\left(\frac{\frac{a}{2}-x+\frac{a}{2}-x+2x}{3}\right)^3 \\ &= \frac{2}{27}a^3 \end{aligned}$$

Así el máximo volumen es $2a^3/27$ el cual se alcanza cuando $x=a/6$.

Observaciones

a) Para cada uno de los problemas tratados se generó un applet que puede verse en http://www.pucp.edu.pe/~matemat/IREM/irem-index.html
b) El lector interesado en ver la solución de problemas similares a los problemas tratados, usando Cálculo Diferencial, puede consultar, por ejemplo Stewart (2000).

Problemas propuestos

1. Una variante del problema 2 es la siguiente: se dobla la esquina inferior derecha de una hoja rectangular de dimensiones *a y b*, $a<b$, hasta que coincida con el borde izquierdo de la hoja, como se muestra en la figura 12. El triángulo sombreado es la parte que se dobla.

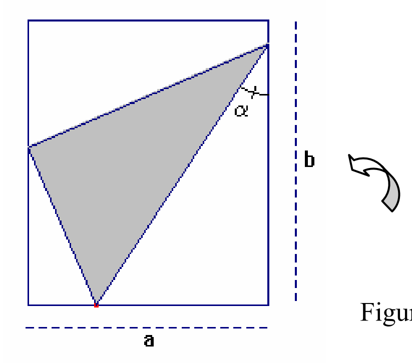


Figura 12

a) ¿Para qué valor del ángulo α el área de la región sombreada es máxima?
b) ¿Para qué valor de α el área es mínima?
c) ¿Cuáles son las restricciones que se deben imponer para tener una buena construcción?

2. Generalice el problema 3 para un rectángulo de lados *a* y *b*, $a<b$.

3. Conjeture sobre la solución del siguiente problema:
En un cuadrado K se inscribe una circunferencia C y por cualquier punto M de C, que no pertenece a K, se traza una tangente a C que corta a K en los puntos A y B. Sea P el centro del cuadrado de lado AB que toca a la circunferencia solo en M. Hallar el lugar geométrico de P cuando el punto M varía sobre C *(XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, España 2004)*.

4. En la siguiente figura se ilustra un pasillo en forma de L de ancho **a** y una mesa rectangular de lados *b* y *c* (con $c < b$), cuyas patas tienen ruedas. Realizar una construcción de manera que simule el traslado de la mesa en la esquina del pasillo (pasar de una dirección a la otra). Conjeture cual es el ancho mínimo del pasillo para que la mesa pueda ser empujada a lo largo del pasillo sin problemas.

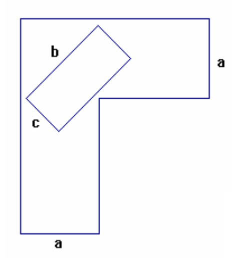


Figura 13

Referencias

Azinian, H. (1998). Capacitación docente para la aplicación de tecnologías de la información en el aula de Geometría. IV Congreso RIBIE, Brasilia.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques (Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfield). Grenoble: La pensée sauvage

Bulajich R., Gómez J. A., Valdez R. (2005). Inequalities. Cuadernos de Olimpiadas Matemáticas. Instituto de Matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México.

Cabrí Geometre II Plus. Manual de usuario.

Stewart, J. (2000). Cálculo Trascendentes Tempranas. Internacional Thomson Editores, S.A. 4ª edición.

Bazán, J. (2006). La estadística llega a la escuela.
En Gonzalez, M., Bazán, J., Sánchez, R. (edits).
Coloquios sobre matemática educativa. Reporte de
Investigación 18. Serie C. Sección Matemáticas PUCP.

LA ESTADÍSTICA LLEGA A LA ESCUELA EN EL PERÚ[1]

Jorge Luis Bazán Guzmán[2]

Resumen

La Estadística llegó a la escuela en nuestro país. Tanto alumnos como profesores tienen nuevas metas y nuevos aprendizajes que incorporar en el aula de clase y aplicarlas en sus vidas académicas y profesionales. La Estadística se ha insertado de a pocos en el quehacer diario como parte de nuestro estilo de vida moderna y de la necesidad actual por incorporar constantemente datos cuantitativos.

En el presente artículo, daremos algunos alcances de cómo la Estadística está llegando a la escuela en nuestro país: problemas que se afronta para su enseñanza, programas curriculares que se han ido implementando en el currículo de matemática, didáctica, problemas aleatorios y una reflexión sobre la afectividad como factor interviniente en la enseñanza de la Estadística También se dan algunos alcances de nivel práctico que pueden ser desarrollados por el profesor en su aula de clase.

Palabras clave: Estadística, probabilidad y aleatoriedad, currículo, afectividad, actividades

---

[1] Conferencia

[2]Profesor de la Sección Matemática de la PUCP. Doctor en Estadística por la Universidad de San Pablo en Brasil. bazan.jl@pucp.edu.pe. El autor agradece el valioso aporte de la Ps. Ana Aparicio en la sección de Afectividad y Estadística

Introducción

Actualmente la Estadística se ha incorporado en forma generalizada al currículo de Matemática en todos los niveles educativos de todos los países desarrollados y en la mayor parte de los en vías de desarrollo. Este hecho ha influido en el avance curricular de la Estadística en la escuela.

El trabajo con Estadística y Probabilidad en la escuela es relevante porque permite que el estudiante desarrolle su capacidad de recolectar, organizar, interpretar y comparar datos para obtener y fundamentar conclusiones (desarrollo de un pensamiento estadístico), posibilitando el desarrollo de análisis críticos sobre diferentes aspectos sociales, económicos, políticos, a la par que posibilita el desarrollo de habilidades cognitivas y afectivas.

En el Perú, la Estadística ha llegado a la escuela a través de su implementación en los currículos de Matemática. Esto obedece a una necesidad en la educación de nuestros futuros ciudadanos, ya que en los últimos años se ha comprendido la necesidad de formar estudiantes con capacidades para interactuar en un mundo de información; en un mundo competitivo, que requiere capacidades para leer y producir información, sea esta gráfica o simbólica y en donde los fenómenos aleatorios aparecen con frecuencia.

La Estadística en la escuela supone la formación de una nueva manera de razonar, una mayor relación con la recolección de datos empíricos, una mayor búsqueda de evidencias que sustituyen a la especulación simple sin fundamentos.

Pero aún en la esfera personal, la Estadística en la escuela significa el encuentro de maestros y aprendices para formar actitudes nuevas frente a la realidad, siendo esto enriquecedor desde todo punto de vista. La escuela se está convirtiendo, con la Estadística en ella, en un espacio de reflexión y en una base para la investigación.

Como se muestra en el cuadro 1, autores como Holmes (1980), Fischbein (1975) y Begg (1997), han expresado que la Estadística forma parte de la educación ciudadana presente y futura, porque promueve un espíritu crítico, un razonamiento diferente a la matemática más bien determinista, porque se relaciona con diversas habilidades como la comunicación y la resolución de problemas estableciendo pautas para el uso de estrategias heurísticas y metodológicas.

La enseñanza de la Estadística y de la probabilidad en las escuelas, ha sido objeto de investigaciones en diferentes partes del mundo. Muchos investigadores publican trabajos al respecto, queriendo justificar la relevancia de la enseñanza de la estadística desde los niveles más básicos de la escuela, como ha sido mencionado por los autores citados anteriormente.
Un indicador de la expansión de la Estadística en la educación son los eventos de nivel internacional, como el IX IASE (Seminario de Estadística Aplicada): “Estadística en la Educación y Educación en Estadística” celebrada en Brasil en el 2003, Congresos como el ICOTS (Conferencia Internacional sobre la enseñanza de la Estadística) celebrada en Sudáfrica en el 2002, las sesiones de educación en la conferencia ISI (Instituto Internacional de Estadística) de Berlín en el 2003, el VII EPEM (Encuentro Paulista de Educación Matemática) celebrada en Brasil en el 2005, todos ellos resaltan temas sobre la importancia de incorporar la estadística en la educación desde sus niveles más básicos.

La utilidad de la enseñanza de la Estadística se refiere a la necesidad de que todos los individuos tienen, en algún momento, que dominar algunos conocimientos de esta área para actuar en la sociedad. Estos conocimientos son fundamentales, como el analizar costos de vida y otras situaciones cotidianas. La competencia en temas básicos de Estadística permitirá a los alumnos una sólida base para desarrollar estudios futuros y actuar en áreas científicas y de las ciencias sociales.

Es necesario entonces, en un mundo globalizado como el nuestro, un conocimiento básico de la Estadística y de la Probabilidad, que permita a los futuros ciudadanos ser más ágiles en la toma de decisiones y predicciones, desarrollando cada vez más sus capacidades críticas y de autonomía.

Cuadro 1. La Estadística en la escuela según diversos autores

Autor	La Estadística en la escuela
Holmes (1980)	▪ La Estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos. Para orientarse en el mundo actual, ligado por las telecomunicaciones e interdependiente social, económica y políticamente, es preciso interpretar una amplia gama de información sobre los temas más variados. ▪ Es un útil para la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema. La Estadística es indispensable en el estudio los fenómenos complejos, en los que hay que comenzar por definir el objeto de estudio, y las variables relevantes, tomar datos de las mismas, interpretarlos y analizarlos. ▪ Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva; hemos de ser capaces de usar los datos cuantitativos para controlar nuestros juicios e interpretar los de los demás; es importante adquirir un sentido de los métodos y razonamientos que permiten transformar estos datos para resolver problemas de decisión y efectuar predicciones (Ottaviani, 1998). ▪ Ayuda a comprender otros temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.
Fischbein (1975)	▪ Señala el carácter exclusivamente determinista que el currículo de matemáticas ha tenido hasta hace unos años, y la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad: *"En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico".*

Begg (1997)	▪ Señala que la Estadística es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de la información, resolución de problemas, uso de computadoras y trabajo cooperativo y en grupo, a las que se da gran importancia en los nuevos currículos. Además, la probabilidad y la Estadística se pueden aplicar fácilmente, puesto que no requieren técnicas matemáticas complicadas. Sus aplicaciones, proporcionan una buena oportunidad para mostrar a los estudiantes la utilidad de la matemática para resolver problemas reales, siempre que su enseñanza se lleve a cabo mediante una metodología heurística y activa, enfatizando la experimentación y la resolución de problemas.

Por tanto, creemos que asuntos relacionados con la enseñanza de la Estadística en la escuela deben de ser trabajados de manera significativa afrontando tanto las dificultades como los beneficios de su enseñanza. No bastará que los alumnos entiendan los índices estadísticos como el crecimiento poblacional, las tasas de desempleo o de inflación, es preciso enseñarles a analizar y relacionar críticamente los datos que se les pueda presentar, para que sean capaces de cuestionar e interpretar la veracidad de los datos y hacer sus propias conclusiones.

De esta forma, la escuela debe de proporcionar a sus alumnos, desde los primeros años de su educación, la formación de conceptos que lo auxilien en el ejercicio de su ciudadanía.
En este artículo presentamos cuatro secciones que nos permitirán resumir como y porque la Estadística esta llegando a la Escuela, la primera enfoca las dificultades que se afrontan en su enseñanza como un nuevo reto de la educación en nuestro país, en la segunda sección tratamos de establecer cierta didáctica en la enseñanza de la Estadística que ayude a afrontar las dificultades tratadas en la sección anterior; en la sección 3 hablamos sobre los experimentos aleatorios como conceptos que son tratados por el profesor de aula que le servirán de herramienta para tratar temas como probabilidad y aleatoriedad. Por último, hablamos sobre la importancia del aspecto afectivo en la enseñanza de la Estadística, reportando estudios en nuestro país como el de Aparicio y Bazán (2005). Como anexo incorporamos

ejercicios prácticos que podrán ser utilizados por el profesor en la sala de aula.

Dificultades en la educación Estadística

La Educación Estadística no es una tarea sencilla, no se cuenta en la mayoría de los casos, con docentes capacitados para la Enseñanza de la Estadística en nuestro país. Esto convierte a la Educación Estadística en todo un reto pues esta tarea como se aprecia en el cuadro 2 presenta diferentes dificultades:

Cuadro 2. Dificultades en la Educación Estadística

Dificultades en la educación Estadística
▪ Los cambios progresivos que la Estadística está experimentando en nuestros días, tanto desde el punto de vista de su contenido, como del punto de vista de las demandas de formación nos lleva a tener que enseñar Estadística a alumnos con capacidades y actitudes variables.
▪ La Estadística como ciencia, atraviesa un periodo de notable expansión, siendo cada vez más numerosos los procedimientos disponibles, alejándose cada vez mas de la matemática pura y convirtiéndose en una "ciencia de los datos", lo que implica la dificultad de enseñar un tema en continuo cambio y crecimiento.
▪ El número de investigaciones sobre la didáctica de la Estadística es aún muy escaso, en comparación con las existentes en otras ramas de las matemáticas
▪ La naturaleza de la Estadística es muy diferente de la cultura determinista tradicional en clase de matemáticas.
▪ La formación específica de los profesores en este ámbito específico es prácticamente inexistente.
▪ En nuestro medio no existen libros o textos escolares sobre Didáctica de la Estadística. Los de Matemática para la escuela pueden presentar algunos errores conceptuales y pedagogía inadecuada cuando se trata de introducir conceptos estadísticos.
▪ La naturaleza interdisciplinar de la Estadística lleva a introducir conceptos estadísticos en materias como Ciencias Sociales, Biología, Geografía, etc., pudiendo ocasionar conflictos con la enseñanza en la clase de Matemáticas.

En nuestro país la Educación Estadística se ha incorporado en la estructura curricular vigente. En el nivel primario como una competencia del área de desarrollo de Lógico Matemática llamada Organización y gestión de datos y en el nivel secundario como un contenido de Matemáticas llamado Estadística y probabilidades

En el cuadro 3 presentamos en detalle las capacidades y actitudes de la competencia de Organización y Gestión de Datos para los tres ciclos del nivel primario y en el cuadro 4 los correspondientes al nivel secundario. Estas capacidades corresponden por un lado a la Estadística y por otro a la probabilidad. En el caso de la Estadística, se tienen capacidades de recopilación de datos, manejo gráfico, organización de datos, empleo de tablas de frecuencia, uso de medidas Estadísticas sencillas, uso de la calculadora.

En el caso de la probabilidad, se tienen capacidades de uso de cuantificadores, registro de ocurrencias de sucesos y realización de inferencias sencillas.

Cuadro 3. Organización de datos. Iniciación a la Estadística en el área Lógico Matemática. Nivel Primario

	Competencias	Capacidades y actitudes
CICLO 1	Registra y comunica información sobre su realidad inmediata utilizando cuadros, esquemas y códigos. Aprecia el lenguaje gráfico como forma de representación y comunicación de acontecimientos en su vida familiar y escolar.	• Utiliza diferentes estrategias de recojo y cuantificación de datos en situaciones de su vida diaria (uso de palotes, aspas). • Registra y organiza datos de hechos concretos (horarios, turnos de trabajo, cuadros de asistencia, resultados de juegos sencillos de azar, ...) y los representa en tablas de doble entrada y diagramas de barras. • Realiza representaciones gráficas (diagramas de barras, pictogramas, tablas de doble entrada) de información dada. • Lee interpreta diagramas de barras, pictogramas y tablas de doble entrada correspondientes a experiencias realizadas por ellos mismos.
CICLO 2	Elabora e interpreta gráficos con datos referentes a fenómenos y situaciones de su entorno; valorando la importancia del lenguaje gráfico y juzgando críticamente la información obtenida.	• Clasifica objetos y seres de acuerdo a dos o más propiedades comunes, nominando cada grupo. Forma subclases a partir de una clase dada, reconociendo el todo y las partes. Utiliza cuantificadores (todos, algunos, ninguno, por lo menos uno). Representa gráficamente utilizando el esquema "árbol" y cuadros de doble entrada. • Interpreta y elabora esquemas clasificatorios para organizar sus actividades familiares, escolares y comunales. • Recolecta, cuantifica datos y elabora estrategias de codificación. Interpreta y construye tablas numéricas y no numéricas. • Elabora gráficos estadísticos con datos referentes a situaciones de su entorno (utilizando gráficos de barras, poligonales o pictogramas). Aprecia la veracidad como valor vinculado a la elaboración e interpretación de datos estadísticos. • Registra la ocurrencia de un suceso cuando realiza juegos de azar sencillos con monedas, dados, casinos, etc. Expresa la probabilidad de ocurrencia de un suceso simple, empleando los términos "siempre", "nunca", "a veces". Juzga críticamente los juegos de azar.

C I C L O 3	Elabora e interpreta tablas y gráficos que corresponden a fenómenos naturales, económicos y sociales de su medio local y nacional, y emite opinión sobre ellos. Resuelve, evalúa y formula problemas de la vida cotidiana relacionados con el registro, organización e interpretación de datos estadísticos.	• Recoge y registra datos sobre situaciones familiares, comunales y nacionales. Elabora gráficos estadísticos con datos referentes a situaciones conocidas, utilizando gráficos de barras, poligonales y diagramas circulares. • Recoge y registra datos sobre situaciones familiares, comunales y nacionales. Elabora gráficos estadísticos con datos referentes a situaciones conocidas, utilizando gráficos de barras, poligonales y diagramas circulares. • Lee e interpreta diagramas, esquemas, tablas y gráficos relacionados con información significativa para ella/él. Compara información expresada en tablas. Elabora preguntas y conclusiones a partir de los datos. • Halla el promedio de un conjunto de datos e interpreta resultados. • Emplea la calculadora u otros medios informáticos para procesar la información. • Resuelve problemas relacionados con situaciones de su vida diaria vinculados al registro y organización de datos y a la interpretación Estadística de los resultados obtenidos. • Valora el lenguaje gráfico como un instrumento para representar e interpretar información referente a la realidad. • Aprecia la veracidad como valor vinculado al manejo de datos y de los procedimientos estadísticos. • Expresa lo probable de la ocurrencia de un suceso basándose en los datos disponibles. • Valora la importancia de la utilización de la Estadística a través de su aplicación a situaciones de la vida real.

Cuadro 4. Estadística y probabilidades en el área de Matemática. Nivel Secundario.

Ciclo	Capacidades y actitudes
CICLO 1	*Estadística* 1. Interpretación de gráficos estadísticos: Gráficos de barras, De barras, polígono de frecuencias y pictogramas. 1. Manejo de datos. 2. Promedios aritmético y ponderado. 3. Tablas de frecuencia. 4. Diagramas de clasificación y conteo. *Probabilidad* 1. Experimento aleatorio. 2. Espacio muestral. 3. Probabilidad de un evento.
CICLO 2	*Estadística* 1. Variables estadísticas. Clasificación. 2. Población y muestra. 3. Frecuencias. Frecuencia relativa y acumulada. 4. Representación gráficas de distribuciones: Histograma, Polígono de frecuencia, ojiva. 5. Medidas de tendencia central: Media, mediana y moda. *Probabilidades* 1. Probabilidad y frecuencia. Método Montecarlo. 2 Esperanza matemática. 3. Factorial de un número. 4. Variaciones y permutaciones. Combinaciones. 5. Binomio de Newton. 6. Aplicaciones a las probabilidades.

Didáctica de la Estadística

Para establecer una didáctica de la Estadística es conveniente precisar los fines principales de la Enseñanza de la Estadística señalados por Batanero (2000), y estos son:

- Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de la Estadística en la sociedad, conociendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que la Estadística ha contribuido a su desarrollo.

- Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método estadístico, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de la Estadística puede responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencia y limitaciones.

Estas dos son las líneas que hemos señalado como presentes en la estructura curricular. Pero para organizar una didáctica no basta señalar los fines, hay que precisar el cómo hacerlo.

Las recomendaciones más generales para la Didáctica de la Estadística son:

- Como estamos en presencia de una ciencia que cambia rápidamente, lo más importante no serán los contenidos específicos, sino el tratar de desarrollar en nuestros alumnos una actitud favorable, unas formas de razonamiento y un interés por completar posteriormente su aprendizaje.
- Si queremos que el alumno valore el papel de la Probabilidad y de la Estadística, es importante que los ejemplos que mostremos en la clase hagan ver de la forma más amplia posible esta fenomenología, e incluyan aplicaciones de su mundo biológico, físico, social y político sin renunciar a los juegos de azar. Hay que procurar que estas sean cercanas a los intereses de los alumnos.

De manera específica, Batanero (2000) ha señalado que dentro del actual enfoque se debe fomentar los proyectos estadísticos y la experimentación con fenómenos aleatorios. Estas dos actividades deben ser actividades significativas y experiencias de aprendizaje que señalan una diferencia sustancial con la forma como se aprende la Estadística en la Educación Superior, esto podemos verlo en el cuadro 5:

Cuadro 5: Actividades significativas para la Didáctica de la Estadística

Actividades significativas para la Didáctica de la Estadística
▪ Los proyectos estadísticos permiten a los alumnos elegir un tema de su interés en el cual precisen definir los objetivos, elegir los instrumentos de recogida de datos, seleccionar las muestras, recoger, codificar, analizar en interpretar los datos para dar respuesta a las preguntas planteadas. Los proyectos introducen a los alumnos en la investigación, les permiten apreciar la dificultad e importancia del trabajo del estadístico y les hace interesarse por la Estadística como medio de abordar problemas variados de la vida real.
▪ La experimentación con fenómenos aleatorios (real o simulada) proporciona al alumno una experiencia estocástica (basada en el azar), difícil de adquirir en su relación empírica con lo cotidiano.

Un aspecto importante de la Didáctica de la Estadística es el uso de materiales de aprendizaje. Los materiales de aprendizaje en el nivel escolar deben ser, a diferencia de la Didáctica de la Estadística en el nivel superior, materiales manipulativos.

Los materiales manipulativos son mucho más importantes para el aprendizaje de la Probabilidad que para la Estadística misma. La principal razón para esto es que se trata de presentar a los estudiantes experimentos aleatorios, es decir, situaciones experimentales donde se dé un fenómeno de aleatoriedad en el cual se pueda definir una medida, la probabilidad, que puede asignar un valor para los eventos posibles de ese fenómeno.

Los experimentos aleatorios

Los experimentos aleatorios son irreversibles y no se aprende de la experiencia. El análisis de un experimento aleatorio va más allá del resultado inmediato y requiere la consideración de todos los sucesos posibles, es decir del espacio muestral del experimento. Por tanto, el uso del material para la clase de probabilidad, implica realizar una serie de experimentos, recoger sus resultados, calcular las frecuencias de los distintos resultados, elaborar tablas y gráficos, y comprobar conjeturas (hipótesis) sobre el experimento, es decir, organizar un estudio estadístico del experimento. Sólo cuando se recogen datos de una serie larga de experimentos se produce la convergencia y se aprecian regularidades en el comportamiento de los fenómenos aleatorios. Así, si partimos de una clase de Estadística (situación de análisis de datos), será difícil olvidar completamente los problemas probabilísticos sobre la variabilidad, aleatoriedad, generalización de las conclusiones, posibilidad de predicción.

Otra gran posibilidad de presentar experimentos aleatorios a los estudiantes es usar simulación. La simulación consiste en emplear la computadora y específicamente algunos programas para simular situaciones equivalentes a las situaciones experimentales. Por ejemplo, se puede simular una secuencia de ceros y unos como un experimento equivalente al experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire.

La ventaja principal de la simulación es su rapidez, y la posibilidad de introducir variantes. Más aún, como se aprecia en el Cuadro 6, presenta otras ventajas.

Cuadro 6. Ventajas de la Simulación

Ventajas de la Simulación
▪ Un uso característico consiste en utilizarlo para sustituir un experimento aleatorio difícil de observar en la realidad, por otro equivalente.
▪ La simulación permite condensar el experimento en el tiempo y en el espacio y operar con el experimento simulado para obtener conclusiones válidas para el experimento original.
▪ Proporciona un método "universal" para obtener una estimación de la solución de los problemas probabilísticos.
▪ En la enseñanza de la estocástica en secundaria la simulación cobra un papel importante, ya que, como se sugieren en los *Estándares Curriculares y de Evaluación* del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) ayuda al alumno a conocer las diferencias entre la probabilidad experimental y la teórica.

El centro de atención de la docencia ya no debe limitarse a enseñar técnicas combinatorias, sino que se debe dar mayor importancia al análisis del problema y el diseño de un procedimiento adecuado de simulación.

Hay que tener en cuenta, sin embargo, que la realización de experimentos, en sí misma (el enfoque frecuencial de la enseñanza de las probabilidades) permite encontrar una estimación de la solución del problema (incluso la solución para algunos problemas, como los de optimización). Pero no proporciona la justificación del porqué esa solución es correcta.

Investigaciones sobre experimentos aleatorios lo podemos encontrar en los trabajos de Bazán (1996 a, b) que trata sobre el tema de la noción de distribución estadística según la edad. Aquí se reflexiona sobre la probabilidad y analiza la propuesta de Cohen (1974) y Piaget (1974) sobre el tratamiento experimental de la probabilidad y la relación con lo aleatorio. El estudio experimental de la probabilidad permite destacar aspectos cognitivos, afectivos, sociales y culturales puestos en juego por los sujetos que son sometidos al experimento como ocurre en Bazán (1996a), donde el autor aplica la propuesta de Cohen (1974) a un grupo de niños de diferentes edades con un procedimiento experimental ad-hoc. Se proponen hipótesis sobre el nivel de pensamiento característico presentado en ocho niños y la noción de probabilidad que podrían presentar. Otro trabajo en nuestro medio es el de Frisancho (1996) pero con ingresantes a la universidad.

Afectividad y Estadística

El estudio de los componentes afectivos en el rendimiento va tomando más importancia, según Auzmendi (1992), la dimensión afectiva del aprendizaje resulta esencial para el logro de las competencias y propósitos educacionales que el sistema escolar se propone. Así, un aspecto afectivo de importancia en la explicación del rendimiento es sin duda la actitud del aprendiz al curso que aprende. Por otro lado, la influencia de la Estadística en la educación y en la concepción del mundo ha tomado ya gran importancia, como se ha visto en los párrafos anteriores.

Una de las preocupaciones, tanto del maestro como del alumno, es el bajo rendimiento en el área de Matemáticas y específicamente en Estadística. El problema puede ser explicado desde diferentes dimensiones como es el mejoramiento del currículo y la capacitación del docente, sin embargo, el problema es integral y obedece a fuertes componentes de nivel afectivo como la mala actitud del alumno y del maestro hacia la asignatura dictada.
Trabajos al respecto en nuestro país son encontrados en Aparicio y Bazán (2005), donde se estudia las relaciones entre la actitud hacia la Estadística y el rendimiento académico en un grupo de profesores que llevaban un curso de complementación académica y que cursaban la asignatura de Estadística y la verificación de resultados picométricos de dos escalas de actitudes a la estadística reportadas por Aparicio et al (2004).

Los resultados indicaron un cambio significativo y favorable de las actitudes y una relación positiva entre rendimiento y actitudes al final de la disciplina; es decir, el desarrollo de la disciplina de Estadística contribuyó para la presencia de relación entre el rendimiento y las actitudes a la Estadística. También se encontraron condiciones picométricas óptimas de las escalas utilizadas. Este estudio nos lleva a reflexionar sobre la influencia que el profesor puede ejercer en el salón de clase transmitiendo de manera indirecta actitudes, positivas o negativas, en sus alumnos y que de alguna manera pueden influenciar en el rendimiento de estos en la disciplina de Estadística. Creemos pues que la enseñanza de la Estadística en la escuela deba ser tratada desde una óptica integral que considere tanto factores externos como internos, en maestros como en alumnos, para obtener una actitud favorable a la Estadística y un mejor rendimiento en ella.

Comentarios finales

Tanto alumnos como profesores estamos vinculados con una nueva era de la información, formamos parte de un mundo donde hay que aprender a manejar y a interpretar gran información, leer y comprender estadísticas en los periódicos, en la televisión, revistas, Internet, en general un mundo moderno y globalizado que nos exigirá cada día tener nuevas capacidades y habilidades para "sobrevivir" en este nuevo contexto para afrontar situaciones en diferentes ámbitos de nuestras vidas: profesional, académico, social, político y económico. Tenemos certeza de que la llegada de la Estadística a la escuela inicia la formación de una nueva generación más capacitada para afrontar estos nuevos retos que los orientarán hacia el bienestar de nuestro país.

En este trabajo hemos presentado un breve panorama de lo que significa que la estadística llegue a la escuela en el Perú, desde el aspecto curricular básico hasta aspectos que pueden influenciar en el desarrollo de su aprendizaje. Con ello presentamos nuevos retos de enseñanza y aprendizaje, que esperamos se reflejen en nuevas investigaciones que apunten hacia el mejoramiento de la enseñanza y del aprendizaje de la Estadística.

Referencias

Aparicio A.; Bazán J.; Abdounur, O. (2004). Atitude e desempenho em relação à estatística em professores de ensino fundamental no Peru: primeiros resultados. *Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática (EPEM).* Universidade de São Paulo. Brasil. http//:www.sbempaulista/viiepem/anais

Aparicio A.; Bazán J. (2005). Actitud y rendimiento académico en profesores que cursan una asignatura de Estadística en la complementación académica en Perú. *Décimo novena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELIME).* Montevideo-Uruguay.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la Matemática Estadística en las enseñanzas medias y universitarias.* Mensajero, Bilbao. España.

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la Educación Estadística?. *Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Blaix* (en prensa). http://www.ugr.es/~batanero/.

Bazán, J. (2001). *Estadística aplicada a la Educación*. Facultad de Teología Pontificia y Civil de Lima. Lima Perú.

Bazán, J. (1996a). Noción de distribución estadística en una muestra de escolares Una aproximación. *Más luz. Revista de Psicología y Pedagogía.* Colegio D.F. sarmiento.

Bazán, J. (1996b). Una revisión de estudios psicológicos sobre la noción de probabilidad. *Correspondencia psicológica.* Revista del equipo de trabajo psicológico "Extramuros". Año 1996. Segundo número. Pg. 23-30.

Begg, A. (1997). Some emerging influences underpinning assessment in statistics. En: I. Gal & J. B. Garfield (Eds.). *The assessment challenge in statistic education* (pg. 17-26). IO Press and International Statistical Institute. Voorburg.

Cohen, J. (1974). Probabilidad subjetiva. *En: Matemáticas en las ciencias del comportamiento*. Madrid. Alianza editorial S.A. vol 5. pp. 50-58

Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria (2004). *Dirección Nacional de Educación Secundaria y Superior tecnológica.* Ministerio de Educación del Perú.

Fischbein, J. (1975). *The intuitive source of probabilistic thinking in children.* Reidel Dordrecht.

Frisancho, S. (1996). Razonamiento probabilístico en estudiantes universitarios. Tesis (Mag) PUCP. Escuela de Graduados. Mención: Psicología.

Holmes, P. (1980). *Teaching Statistics*, 11-16. School Council by Foulsham Educational England. Sheffield.

Ottaviani, G. (1998). Promover la enseñanza de la Estadística: la contribución del IASE y su cooperación con los países en vía de desarrollo. Conferencia Inaugural. *Actas de la conferencia internacional: Experiencias y perspectivas* de *la enseñanza de la Estadística*. Florianópolis. Brasil.

Piaget. J. y Longeot (1974). Escala para medir el desarrollo del pensamiento lógico. Manual de instrucciones.

Anexo 1. Actividades a desarrollar entre profesores

1. Analice el Cuadro 3 de capacidades y actitudes de la competencia Organización y Gestión de Datos que se desprende de la estructura curricular del nivel primario. Indague entre sus colegas que dificultades tienen para su enseñanza y qué actividades didácticas están desarrollando para su enseñanza.
2. Realice la actividad 1 considerando el cuadro 4 para el nivel secundario.
3. ¿Qué otras dificultades de la Educación Estadística puede identificar a partir de su experiencia en el aula?
4. Identifique y presente 3 actividades significativas que faciliten la Enseñanza de la Estadística. Mencione la capacidad o contenido, el grado ciclo en la que se desarrolla, los objetivos de la actividad, los materiales necesarios, el desarrollo de la actividad, las dificultades identificadas en su implementación y las sugerencias finales. Consulte un texto escolar en el área de desarrollo de Lógico Matemática.
5. Identifique textos, artículos o material bibliográfico sobre la Enseñanza de la Estadística en su localidad. Inicie búsquedas por Internet.

Anexo 2. Actividades para desarrollar en el aula

1. Explorando la información

- Seleccione un diario, por ejemplo "El Comercio" del día domingo. Identifique y recorte junto a sus alumnos, reportes noticieros o anuncios que utilicen datos para describir nuestro mundo actual.

a) En los deportes.
b) En las Finanzas, Economía y Negocios.
c) En el ámbito Internacional.
d) En el ámbito Nacional.
e) En la Cultura y la ciencia.
f) Educación
g) Política

- ¿Cuáles son algunos de los problemas de tu escuela o comunidad que necesitan una colección de datos para determinar un diagnóstico que permita tomar decisiones pertinentes?

⇒ Genere un debate sobre lo hallado. Dé conclusiones sobre la forma como se presenta la Información en nuestro mundo actual.

2. Explorando la Estadística

Recopilación de datos

- A continuación se muestra un listado de problemas cotidianos en tu escuela. ¿Qué información deberá recogerse para resolverlos? ¿En que problemas se usarán las muestras? Sugiera ideas de como recopilar los datos.

a) ¿Cuál es el promedio de peso y talla de los alumnos de primer grado?
b) ¿Cuántos pupitres o carpetas para zurdos deberán ser encargados para cada salón de clase en tu escuela?
c) ¿Por qué llega tarde el estudiante a clases los lunes por la mañana?

d) ¿Cuánto tiempo dedican los estudiantes de sexto grado a ver televisión cada semana?

⇒ Genere un debate sobre lo hallado. Dé conclusiones sobre la importancia de la recopilación de datos en su escuela.

Organización de Datos:

- A continuación te sugerimos una lista de posibles exploraciones que puedes ejecutar en tu escuela.

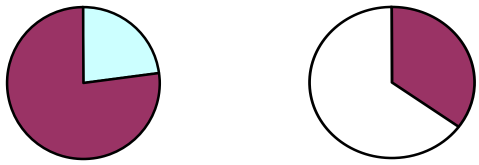
a) Registro de Fechas del calendario cívico escolar.
b) Informes sobre el tiempo - temperatura, lluvias, humedad, etc. sobre tu comunidad.
c) Informes sobre tráfico - accidentes, cantidad de tráfico, número de vehículos, número de lugares de estacionamiento en los alrededores de tu escuela.
d) Ausencias o tardanza escolares.
e) Costos escolares
f) Venta de golosinas o comida en el quiosco del colegio.
g) Estadísticas vitales en los alumnos- número de hermanos, estado civil de los padres, desempleo, etc.
h) Actividades recreativas - radio, cine, libros, revistas, deportes, clubes, etc.
i) Informes financieros - precio de cambio del dólar, tasas de interés de ahorros, acciones de ciertas compañías.
j) Periódicos - anuncios, fotografías, comics
k) Condiciones del mercado - ventas y precios de los productos de la canasta familiar.
l) Grados y notas escolares.
m) Dinero en circulación: moneda y papel.
n) Facturas domésticas - gas, electricidad, agua, teléfono.
o) Inventario de ropa - color, número, tipo
p) Estaturas, pesos, tamaños de calzado.
q) Distribución mensual de cumpleaños.

⇒ Genere un debate sobre lo hallado. Dé conclusiones sobre la importancia de la organización de datos en su escuela.

Presentación de Datos

1. A continuación se muestran la siguiente gráfica.

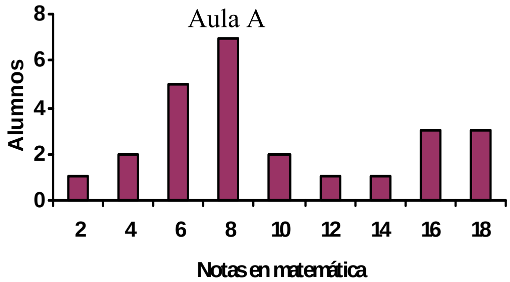
Mujeres en las Aulas del 4to grado

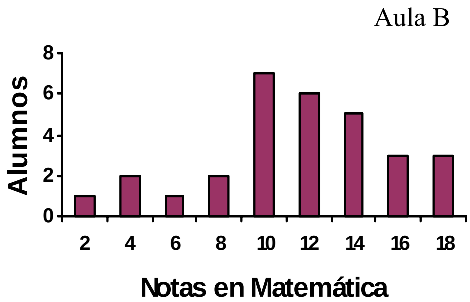


Aula A *Aula B*

a) ¿Las gráficas indican que en el salón A hay más mujeres que en el salón B?
b) ¿Qué otros datos podrían ser útiles para tener una conclusión adecuada?

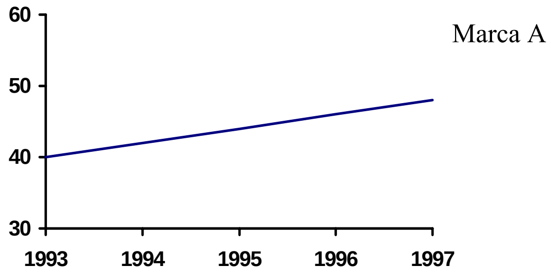
2. A continuación se muestra la siguiente gráfica.

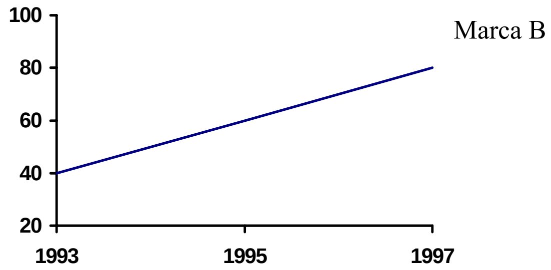




a) Según los histogramas mostrados, ¿el aula B tienen mejores notas que el aula A?
b) ¿Por qué sí o por qué no?

3. A continuación se muestra la siguiente gráfica.





a) ¿Qué marca de jabón muestra un mayor incremento anual en sus precios?

⇒ Genere un debate sobre lo hallado. Dé conclusiones sobre la importancia de la presentación de datos de manera gráfica en nuestro mundo actual.

Análisis de Datos

- ¿Por qué no son válidas las conclusiones basadas en los datos de los siguientes problemas? Explique, en cada caso, sus razones.

a) En 1996 murió más gente en accidentes de aviación que en 1966. Por tanto era más peligroso viajar en avión en 1996 que en 1966.
b) Las vacas pintadas producen un 26 por ciento más de leche que otras vacas. Por tanto, las vacas pintadas, son las mejores productoras de leche.
c) En Trujillo hay menos accidentes que en Lima. Luego, conducir un automóvil en Trujillo es más seguro que conducirlo en Lima.
d) Todos los que tomaron Septa curaron su catarro en siete días. Por tanto, Septa cura el catarro.
e) Ninguna alumna aprobó el curso de Matemáticas. Por tanto, las mujeres no son buenas para las matemáticas.

- Tome los recortes de la primera actividad sobre el uso de la Estadística que contienen información numérica actual. ¿Para Ud. la información dada es clara y correctamente usada? Las afirmaciones que se hacen en los recortes, ¿son verdaderas, falsas o cuestionables?

⇒ Genere un debate sobre lo hallado. Dé conclusiones sobre el análisis de Datos en el mundo actual.

Actividades complementarias

1. Haga un cuadro, mapa o papelógrafo de ejemplos de Estadística de la vida diaria para colocarlo en el aula.
2. Visite una oficina del INEI local, laboratorio de Estadística o entrevistar a un estadístico.
3. Genere un debate sobre el Uso de la Estadística en nuestro mundo actual.

PROBLEMAS: OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE PARA ALUMNOS Y PROFESORES[1]

Uldarico Malaspina Jurado[2]

Resumen

En el presente artículo se desea enfatizar la importancia de los problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Al tener sesiones de resolución de problemas con métodos activos y colaborativos, con el docente en una actitud completamente abierta a las inquietudes e iniciativas de los estudiantes, aprenderán no sólo los estudiantes, sino también el profesor. El aprendizaje del profesor se dará desde la fase de preparación de la sesión y puede ser no sólo en aspectos pedagógicos, sino también en aspectos matemáticos. Es fundamental la concepción que se tenga de la matemática y de lo que significa resolver problemas, para que las sesiones con los estudiantes realmente estimulen la formación del pensamiento matemático, la investigación y el "hacer matemática".

Palabras clave: Resolución de problemas, creación de problemas, concepción de la matemática, oportunidades de aprendizaje, actitudes y capacidades

Introducción

Las experiencias desarrolladas en mis clases de pre y de post grado, así como en talleres de capacitación de docentes de diversos niveles educativos, me llevan al convencimiento de que es muy enriquecedor para el profesor y para los alumnos

---

[1] Conferencia

[2] Magíster en Matemáticas. Profesor Principal de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Dirige el IREM-Perú y es Presidente de la Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana. umalasp@pucp.edu.pe

tener sesiones de resolución de problemas en las que se parte de una situación descrita y se plantean problemas de dificultad creciente para irlos resolviendo inicialmente en trabajos individuales y luego en grupo. La tarea final es proponer problemas inspirados en la situación dada y en los problemas previamente resueltos o examinados. Mostraré la experiencia tenida con un problema de geometría del espacio

Algunos aspectos fundamentales

Concepción de la matemática.

La forma de aprender y de enseñar la matemática depende en gran medida de la concepción que se tenga de la matemática, en la mayoría de los casos de manera inconsciente, como consecuencia de las experiencias tenidas como estudiante, como profesional y como parte de una sociedad en la que predomina la idea de la matemática como una ciencia acabada, difícil, llena de fórmulas, algoritmos y teoremas a los que sólo tienen acceso algunos privilegiados. Es importante cambiar estos estereotipos y llegar al convencimiento de que la matemática es una construcción social dinámica, en permanente desarrollo, tanto con nuevos resultados como con nuevos métodos, que van surgiendo precisamente al resolver problemas que provienen de la realidad, de otros campos de la ciencia o de la matemática misma, impulsados por la búsqueda de la verdad y de la belleza y por el afán de aportar a explicar, predecir y dominar la naturaleza. Bien decía Jean Dieudonné, famoso matemático del grupo Bourbaki:

> *"La historia de la matemática muestra que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico"*

¿Qué entendemos por problema?

En las sesiones de trabajo hemos asumido que problema es, siguiendo a Schoenfeld, una tarea que es difícil para quien está tratando de hacerla. Difícil en el sentido de constituir un impasse intelectual y no solo a nivel operacional o de cálculo.

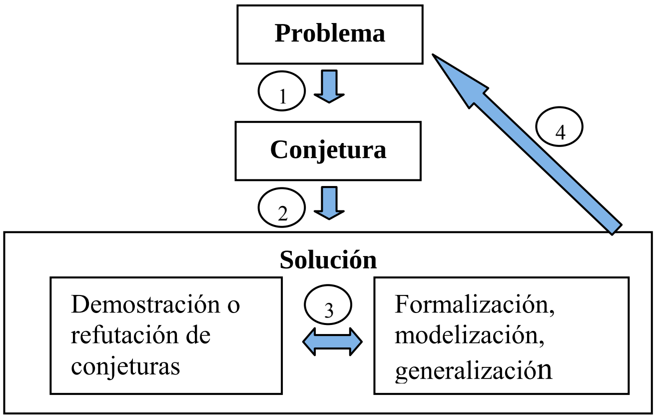
En palabras de Campistrous y Rizo "*la vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida; cuando es conocida, deja de ser un problema*".

Es resolviendo problemas que avanza la matemática y es resolviendo problemas como deberíamos avanzar en el desarrollo de nuestros cursos, presentándolos adecuada y oportunamente para introducir conceptos y procedimientos nuevos.

¿Qué entendemos por resolver problemas?
Las sesiones de resolución de problemas podrían entenderse como ocasiones en las que se entrega a los alumnos una lista de problemas seleccionados de algún libro o de una página de Internet y se les pide que los resuelvan; es de imaginarse que si los alumnos no pueden resolverlos, el profesor expondrá cómo deben resolverse o repartirá una hoja con las soluciones. Sin embargo, la propuesta es mucho más ambiciosa, teniendo como marco la idea que resolver problemas es "hacer matemática"; es decir, vivir en pequeño la experiencia del ciclo dinámico del desarrollo de la matemática, considerando cuatro fases:

1. Identificada la dificultad, conjeturar una solución o una manera de llegar a ella;
2. Pasar de la conjetura a la búsqueda de una solución formal.
3. Proponer una solución, lo cual significa tratar de demostrar o de refutar la o las conjeturas, simultáneamente con la formalización adecuada, la modelización y el refinamiento de lo hecho, incluyendo la generalización si fuera el caso.
4. Plantearse nuevos problemas. El problema no se considera "acabado" al haber encontrado una solución, pues todavía puede explotarse más sus potencialidades al proponer nuevos problemas planteándose nuevas preguntas a partir del problema dado; buscando otras formas de solución; haciéndole modificaciones y conjeturando soluciones o resolviendo las nuevas cuestiones; buscando

conexiones con la realidad y con otros campos de la matemática o de la ciencia, etc.



Con este enfoque, las sesiones de resolución de problemas no son para que el profesor exponga cómo “se deben” resolver los problemas, sino para desarrollar la capacidad de pensar matemáticamente. Y no sólo los alumnos, sino también el profesor, pues debe orientar adecuadamente las iniciativas e ideas de los alumnos – tanto para resolver el problema como para plantearse los nuevos - que pueden estar muy alejadas de las ideas del profesor. Estimular la creación de problemas, es un aspecto sumamente importante en la formación matemática de profesores y estudiantes, poco enfatizado en las propuestas de formación matemática. Proponer un problema supone identificar o crear una dificultad, considerar la información suficiente para resolverlo y redactar un texto adecuado; lo cual es muy diferente a lo que habitualmente se hace en las aulas, pues generalmente se parte de enunciados dados, que tienen ya la dificultad escogida y la información seleccionada. En las experiencias tenidas, se llega a esta fase luego de haber propuesto una situación problemática y dedicado tiempos al trabajo individual de uno o dos problemas sencillos en torno a la situación y luego al trabajo en grupos, con dificultades mayores y graduadas. Es pertinente recordar la reflexión de David Hilbert en su famosa conferencia en el segundo Congreso Internacional de Matemática, en París, en Agosto de 1900: "*Quizás, en la mayoría de los casos, la causa de no haber podido resolver un problema reside en no haber tratado primero de resolver los problemas más sencillos y fáciles. Todo depende entonces de hallar estos problemas más sencillos y tratar de resolverlos por medio de los procedimientos más rigurosos con que contemos y de aquellos conceptos susceptibles de generalización*"

Ciertamente, desarrollar este tipo de sesiones de resolución de problemas requiere que el profesor tenga una sólida formación matemática y una actitud muy amplia y amigable para crear una ambiente de confianza que posibilite la expresión libre de las ideas de los estudiantes, sin que esté presente el temor a equivocarse y a ser criticado por ello.

El papel del profesor es fundamental, no sólo porque debe orientar el trabajo hacia el desarrollo del pensamiento matemático, sino también porque debe inculcar y estimular el desarrollo de valores, actitudes y capacidades.

¿Qué deberíamos hacer al resolver un problema?

Como fruto de las experiencias tenidas, a continuación damos un conjunto de recomendaciones más concretas, que se tendrían que ir desarrollando en las diversas fases consideradas, no necesariamente en el orden en que están enunciadas.

- Comprender el problema, identificar la dificultad.
- Conjeturar una solución o un camino para llegar a la solución.
- Organizar la información.
- Experimentar, buscar regularidades
- Establecer relaciones lógicas.
- Aplicar conocimientos matemáticos.
- Justificar las conclusiones intermedias y finales.
- Encontrar sentido a lo que se desarrolle, en el contexto del problema.

- Verificar la solución encontrada.
- Examinar otros caminos de solución.
- Modificar el problema para examinar otros casos (¿qué pasaría si ….?) Modificar datos, cambiar la dificultad, considerar casos particulares, pensar en generalizaciones, etc.

¿Qué actitudes y capacidades se pueden estimular resolviendo problemas?

En el cuadro se da una lista de algunas de las actitudes y capacidades más importantes que se pueden estimular (preferentemente y no excluyentemente) en las cuatro fases consideradas en la resolución de problemas, en sesiones de trabajo con situaciones problemáticas y dificultades graduadas, a ser resueltas inicialmente de manera individual y luego grupal.

	Pasar de la dificultad a la conjetura	Pasar de la conjetura a la búsqueda de la solución formal	Proponer una solución	Plantear nuevos problemas
Actitudes				
Científica		▪	▪	▪
Crítica		▪		
De investigación	▪		▪	▪
Creativa	▪		▪	▪
De búsqueda de rigor		▪	▪	
De perseverancia	▪	▪		
De tolerancia	▪	▪		
De confianza y seguridad en sí mismo		▪		
De búsqueda de la belleza			▪	▪
De reconocimiento y corrección de errores		▪	▪	
Capacidades				
Entender y establecer relaciones en situaciones complejas	▪			▪
Relacionar lógicamente información y conceptos	▪	▪		▪
Encontrar regularidades	▪			
Estimar	▪			
Predecir	▪			

Intuir	▪			
Organizar información		▪		
Identificar problemas		▪		▪
Comunicarse mediante las matemáticas		▪	▪	▪
Demostrar		▪	▪	
Usar tecnología		▪		
Saber hacer		▪		
Aplicar conocimientos		▪		
Resolver problemas		▪	▪	
Trabajar en grupo		▪	▪	▪
Abstraer			▪	▪
Generalizar			▪	▪
Modelizar			▪	
Entender y manejar símbolos		▪	▪	▪
Proponer problemas				▪
Relacionar la matemática con la realidad y otros campos del conocimiento	▪			▪

¿Qué oportunidades de aprendizaje nos brindan los problemas?

A continuación damos una lista de las diversas oportunidades de aprendizaje que nos brindan los problemas, a los alumnos y a los profesores. El saber aprovecharlas depende mucho de la actitud del profesor al preparar los problemas y al orientar las sesiones de resolución de los mismos, de modo que despierte en sus alumnos el deseo de resolverlos y estimule adecuadamente su creatividad.

a) Aplicar las matemáticas.
b) Comprender la realidad (física, social, económica)
c) Establecer conexiones:
   - entre conceptos matemáticos
   - con otros campos del conocimiento
   - con situaciones de la vida real.
d) Organizar la información.
e) Usar recursos tecnológicos.
f) Sistematizar razonamientos, adoptar notaciones y símbolos
g) Profundizar conceptos matemáticos.

h) Agudizar la intuición científica, la creatividad, la observación, la búsqueda de regularidades, la capacidad de generalizar.
i) Ser rigurosos, hacer demostraciones.
j) Conocer las potencialidades y las limitaciones de las herramientas matemáticas.
k) Disfrutar de la belleza de las matemáticas.
l) Proponer soluciones, establecer criterios objetivos.
m) Identificar y proponer problemas.
n) Dar pasos iniciales en la investigación científica.
o) Practicar el aprendizaje colaborativo
p) Reflexionar sobre la matemática misma
q) Reflexionar sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas
r) Valorar la verdad y la belleza
s) Estimular el desarrollo de determinadas actitudes y capacidades

Experiencias con geometría

En una clase con estudiantes universitarios de segundo y tercer ciclo, propuse la siguiente situación, haciendo ligeras modificaciones a uno que se propuso en una Olimpiada de Mayo

Se tiene un cubo cuyas aristas miden 8 cm. En una arista, a 2 cm de uno de sus extremos, se encuentra una hormiga que debe realizar un recorrido por la superficie del cubo y regresar al punto de partida. Su camino debe contener puntos interiores de las seis caras del cubo y debe visitar sólo una vez cada cara del cubo.

Una de las actividades a desarrollar fue describir el camino que se consideraba el más corto que puede recorrer la hormiga; y otra, la de proponer algún problema inspirado en esta situación. Uno de los grupos de trabajo propuso el problema "*encontrar la longitud del camino más corto sobre la superficie de un tetraedro regular, que una los puntos ubicados en los centros de dos de sus caras".*

En el siguiente ciclo, con otros estudiantes, propuse la siguiente situación:

Una hormiga se encuentra en el centro de una de las caras de un tetraedro regular, cuyas aristas miden 12 cm, y avanza sobre la superficie del tetraedro hasta alcanzar una gota de miel que se encuentra en el centro de otra de las caras del tetraedro

Una de las actividades fue describir el camino de longitud más corta que podría seguir la hormiga; y otra, la de proponer un problema similar, considerando otro cuerpo geométrico. Casi todos los grupos propusieron problemas sobre un cubo. En todos los casos fue sumamente ilustrativo resolver los problemas usando desarrollos planos tanto del tetraedro como del cubo. En particular para mí, como profesor, fue una oportunidad para descubrir, haciendo un estudio de posibilidades con una notación propia, que sólo existen 11 desarrollos planos de un cubo, diferentes entre sí, salvo isometrías. En el problema del tetraedro, con los puntos centrales de dos caras laterales de un tetraedro regular, quedó demostrado que el camino más corto no es paralelo al plano de la base, sino "subiendo" por el segmento perpendicular a la arista común y luego "bajando" en línea recta hasta el otro punto central. Este hecho me motivó a preparar la siguiente situación problemática:

Una hormiga se encuentra en el punto A de una bola esférica, y una gota de miel en el punto B. La bola tiene 6 cm de radio, el ángulo ACB que forman los puntos A y B con el centro C de la esfera mide 60° y ambos puntos están en el paralelo cuyo centro P se encuentra a 3 cm de C.

Una de las actividades fue determinar, aproximadamente, la longitud de un arco AB que se considere el arco de longitud mínima que recorrería la hormiga para llegar a la gota de miel.

Al trabajar con los estudiantes quedó claro que en este caso era imposible recurrir a un desarrollo plano, y la solución del problema del tetraedro ayudó a intuir que el camino más corto no es el arco de un paralelo sino "subiendo" por el arco de una circunferencia máxima. El problema brindó una excelente oportunidad para ejercitar la visión espacial y para la aplicación de teoremas de la geometría plana y motivó la conversación con los estudiantes sobre las geometrías no euclídeas, la geometría de la esfera, las geodésicas, la optimización restringida y el cálculo de variaciones. Se comentó también sobre la vinculación de este problema con la realidad, al considerar las rutas aéreas más cortas entre dos ciudades; en particular entre Nueva York y Madrid, que se encuentran en el mismo paralelo.

Referencias

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996) *Aprende a resolver problemas aritméticos.* La habana, Cuba. Editorial pueblo y educación.

Malaspina, U. (2002) Optimización matemática. En *Acta Latinoamericana de matemática Educativa* (Volumen 15, Tomo 1, pp. 43 – 48) México: CLAME.

Malaspina, U. (2003) Elements for teaching Game Theory. En *PRO MATHEMATICA* (Volumen XVII, No. 33, pp. 87 – 100) Lima, Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Malaspina, U. (2004). Motivation and development of mathematical thinking, using optimization problems. En Gagatsis, A. et al (Ed.) *Proceedings of the 4th Mediterranean conference on mathematics education* (Volume II, pp 491 – 500) Palermo, Italia.

Malaspina, U. (2005). El rincón de los problemas. En Revista Iberoamericana de Educación Matemática: http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, USA. Academic Press.

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS SUPERFICIES EN ESTUDIANTES DE ARQUITECTURA Y URBANISMO[1]

Francisco Ugarte Guerra [2]

Resumen

Partiendo de la premisa que educar geométricamente tiene como finalidad facilitar el conocimiento del espacio tridimensional (Alsina 2000) y, entendiendo como una tarea del docente la enseñanza de la visualización matemática, que va más allá de educar en el conocimiento de la estructura formal y lógica de cualquiera de sus campos (Miguel de Guzmán), es que presentamos una propuesta metodológica para la enseñanza de las superficies* a nivel introductoria, la misma que se ha implementado en los cursos de Matemática 1 y 2, correspondientes a los dos primeros semestres de estudios, de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la PUCP.

La propuesta integra dos problemas: El de la representación gráfica plana de algunas ecuaciones en tres variables, correspondientea superficies que es el motivo de esta socialización, y el problema de la generación de la ecuación de algunas superficies a partir de sus características geométricas que no se tratará aquí.

Palabras clave: Superficies, visualización matemática, estudiantes de arquitectura y urbanismo

Objetivo

Presentar una propuesta metodológica para la enseñanza del representación gráfica plana de algunas ecuaciones en tres

---

[1] Socialización de experiencias

[2] Magíster en Matemáticas. Dpto de Ciencias. Sección Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú fugarte@pucp.edu.pe

* Se entiende por superficie a un conjunto de puntos del espacio ($\mathbb{R}^3$).

variables que permita enlazar los conceptos previos de lugar geométrico, cónicas y ecuaciones con los conceptos a desarrollarse posteriormente: elementos de la geometría vectorial.

Metodología

Las actividades propuestas y los ejercicios están diseñados para que los alumnos:

- Describan las relaciones entre las diferentes representaciones de una superficie: propiedades geométricas que las definen, forma y ecuación asociada.
- Comprueben que el estudio de las formas (superficies) a través de la geometría y el álgebra es un proceso de codificación y decodificación muy útil para estudiar, transmitir y comunicar formas (superficies).

Resultados

La estrategia seguida para la solución del primer problema se basa en cuatro acciones:

Acción 1. Elección de los planos de corte.

Acción 2. Estudio (determinación de las ecuaciones y representación gráfica) de las intersecciones (curvas) obtenidas durante el "proceso de rebajamiento" de la Acción 1

Acción 3. Bosquejo de una forma (superficie) que cumpla las características obtenidas en la Acción 2.

Acción 4. Comprobación de que la visualización obtenida en la Acción 3 también satisface las características obtenidas con cortes alternativos a los de la Acción 1, en caso contrario, modificación del bosquejo planteado en la Acción 3.

Comentarios Finales

Esta propuesta metodológica permite a los estudiantes:

- Reconocer la importancia del estudio de curvas planas para la comprensión de las superficies.
- Comprobar que la ecuación contiene información geométrica sobre las superficies.
- Constatar que si en el plano a partir de una condición geométrica se podía establecer una ecuación en dos variables, entonces en el espacio una ecuación en tres variables describirá alguna característica geométrica de la superficie.

Todo lo anterior dispone al estudiante a plantearse las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la característica geométrica que define a la ecuación descrita por una ecuación dada?
- ¿Cómo a partir de las características geométricas de la superficie puedo establecer su ecuación?

Al mismo tiempo que lo dispone a prepararse para poder responderlas.

Referencias

Alsina, C. (2000) Geometría y Realidad. Universidad Politécnica de Cataluña

De Guzmán, M. (1996) El Rincón de la Pizarra. Madrid: Pirámide

ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA EN PROFESORES DE NIVEL PRIMARIO[1]

Ana Sofía Aparicio Pereda[2]
Jorge Luis Bazán Guzmán[3]

Resumen
En este trabajo analizamos los cambios en las actitudes hacia la Estadística que experimenta un grupo de profesores en ejercicio que asiste a un programa de complementación académica donde se imparte la disciplina de Estadística Educativa en una modalidad semi presencial, estos resultados son analizados con mayor detalle en Aparicio y Bazán (2005). Mediante un diseño pre test y post test fueron evaluados 87 profesores a través de dos escalas de actitudes a la Estadística identificándole cambios significativos.

Palabras clave: cambio de actitudes, estadística, formación de profesores.

Objetivos
Analizar e identificar los cambios en las actitudes positivas y negativas hacia la Estadística en un grupo de profesores en ejercicio a través de sus respuestas en las escalas.

Diferenciar cuales son las actitudes más positivas o más negativas en los participantes y cuales de estas han tenido un cambio significativo.

---

[1] Socialización de experiencias
[2] Estudios de Maestría en Educación concluidos en la Universidad de San Pablo de Brasil. Apta para sustentación de tesis.
[3] Profesor en la Sección Matemáticas de la PUCP. Doctor en Estadística por la Universidad de San Pablo en Brasil.

Metodología

Muestra
87 profesores en ejercicio, que participan de un programa de complementación académica para obtener el título profesional de Licenciado en Educación y que cursan la asignatura de Estadística Educativa (Bazán, 2003).

Instrumentos
Dos escalas de actitudes a la Estadística, de Estrada et al. (2003) y de Cazorla et al. (1999) . La primera escala cuenta con 25 ítems y la segunda con 20 ítems. Ambas escalas son de tipo Lickert con 5 alternativas de respuesta.
El curso presenta contenidos relativos a la Estadística descriptiva como clasificación de variables, elaboración de Tablas de frecuencia y gráficos, medidas estadísticas, muestreo, correlación y regresión lineal simple.

Diseño
Correlacional y cuasiexperimental con pre prueba y post prueba (Hernández et al, 1991).

Procedimiento
Al inicio de la primera sesión de la etapa presencial fueron aplicadas colectivamente las dos escalas de actitudes en un formato conjunto de 45 preposiciones. Las escalas fueron nuevamente aplicadas al final de la etapa presencial

Resultados

El análisis fue realizado empleado la prueba de diferencia de medias usando la t de student. Encontramos que: a) cambios positivos (favorables a una mejor actitud) y muy significativos ($p<0.01$) en 16 % de los ítems de la escala de Estrada y en el 70 % de los ítems de la escala de Cazorla, b) a) cambios positivos (favorables a una mejor actitud) y significativos ($p<0.05$) en 28 % de los ítems de la escala de Estrada y en el 20 % de los ítems de la escala de Cazorla, y c) ausencia de cambios (la actitud permanecía en el mismo nivel experimentado en el pre-test) en el 56% de los ítems de la escala de Estrada y 10 % de los ítems de la escala de Cazorla.

En los Cuadros 1 y 2 se puede observar los cambios que los participantes experimentaron: a) un cambio favorable en relación a la dificultad anteriormente percibida de la Estadística pasando a considerar que la Estadística es fácil; b) modificando favorablemente diversas actitudes de rechazo de tipo emocional frente a la Estadística como: superar su sensación de inseguridad cuando se esforzaban en Estadística, superar su manera de encarar la Estadística con un sentimiento de indecisión resultado del miedo que asumían de no ser capaces en Estadística, expresando que la Estadística ya no los dejaba inquietos, descontentos, irritados e impacientes, superando el hecho de que cuando escuchaban la palabra Estadística tenían un sentimiento de aversión (rechazo) y superando el no gusto inicial por la Estadística (mejoraron su gusto inicial); c) experimento un gusto mayor por la Estadística, gustando realmente de la Estadística y sintiéndose más tranquilos en Estadística considerando que la Estadística es muy interesante.

Cuadro 1: Actitudes que cambiaron positiva y muy significativamente en las escalas de Estrada et al (2003) y Cazorla et al (1999)

Items	ESCALA DE ESTRADA
E17	La Estadística es fácil
E8	Los problemas de la Estadística me resultan fáciles
E15	En la clase de Estadística nunca entiendo de qué están hablando
E11	Me siento intimidado frente a los datos estadísticos
	ESCALA DE CAZORLA
C32	Yo tengo una sensación de inseguridad cuando me esfuerzo en Estadística.
C38	Yo encaro la Estadística con un sentimiento de indecisión, que es resultado del miedo de no ser capaz en Estadística
C39	Yo gusto realmente de la Estadística
C41	Pensar sobre la obligación de resolver un problema de Estadística me deja nervioso(a)
C33	La Estadística me deja inquieto(a), descontento, irritado(a) y impaciente
C35	La Estadística me hace sentir como si estuviese perdido(a) en una selva de números y sin encontrar la salida
C44	Yo me siento tranquilo(a) en Estadística y gusto mucho de esa materia.
C27	Yo no gusto de Estadística y me asusta tener que hacer el curso de Estadística.
C37	Cuando yo escucho la palabra Estadística, yo tengo un sentimiento de aversión (rechazo)
C28	Yo creo que la Estadística es muy interesante y gusto de las clases de Estadística
C42	Yo nunca guste de la Estadística y es la materia que más me da miedo.
C34	El sentimiento que yo tengo con relación a la Estadística es bueno
C31	Cuando estudio Estadística mi cabeza “queda en blanco” y no consigo pensar claramente.
C36	La Estadística es algo que yo aprecio grandemente

Cuadro 2: Actitudes que cambiaron positiva y significativamente en las escalas de Estrada et al (2003) y Cazorla et al (1999)

Ítems	ESCALA DE ESTRADA
E18	Me entero más del resultado de las elecciones cuando aparecen representaciones gráficas
E20	Me gusta hacer problemas cuando uso la Estadística
E1	Me molesta la información Estadística que aparece en algunos programas de TV.
E16	Me apasiona la estadística porque ayuda a ver los problemas objetivamente
E10	Me gusta la Estadística porque me ayuda a comprender más profundamente la complejidad de ciertos temas
E22	A menudo explico a mis compañeros problemas de Estadística que no han entendido
E23	Si pudiera eliminar alguna materia o curso sería la Estadística
ESCALA DE CAZORLA	
C30	La Estadística me hace sentir seguro(a) y es al mismo tiempo estimulante
C45	Yo tengo una reacción definitivamente positiva con relación a la Estadística: yo gusto y aprecio esa materia
C26	Yo quedo terriblemente tenso(a) en la clase de Estadística
C43	Yo quedo feliz en la clase de Estadística que en la clase de cualquier otra materia

En el cuadro 3 se puede observar que los participantes no experimentaron cambios en relación a algunos aspectos que ya consideran negativos como: no divertirse en las clases que se explica Estadística, a considerar que a través de la Estadística se puede manipular la realidad, considerar que utilizan poco la Estadística fuera de su centro de estudio, no entender las informaciones Estadísticas que aparecen en los periódicos. Tampoco los participantes experimentaron cambios en algunos aspectos que ya consideraban positivos como: considerar que la Estadística ayuda a entender el mundo de hoy, no evitar las informaciones Estadísticas cuando las leen, que la Estadística ayuda a tomar decisiones más documentadas, a considerar el uso de la Estadística para resolver problemas de la vida cotidiana, que en la escuela se habría de enseñar Estadística, a considerar que la Estadística es fundamental en la formación básica del futuro ciudadano, a considerar que la Estadística no sólo sirve para la gente del área de ciencias, y a no considerar que la Estadística no sirve para nada, y encontrar interesante el mundo de la Estadística.

Cuadro 3: Actitudes que no cambiaron en las escalas de Estrada et al (2003) y Cazorla et al (1999)

Ítems	ESCALA DE ESTRADA
E7	Me divierto en las clases que se explica Estadística
E3	A través de la Estadística se puede manipular la realidad
E14	Utilizo poco la Estadística fuera de mi centro de estudio
E12	Encuentro interesante el mundo de la Estadística
E9	No entiendo las informaciones Estadísticas que aparecen en los periódicos
E21	La Estadística no sirve para nada
E19	La Estadística sólo sirve para la gente del área de ciencias
E13	Me gustan los trabajos serios donde aparecen estudios estadísticos
E4	La Estadística es fundamental en la formación básica del futuro ciudadano
E6	En la escuela no se habría de enseñar Estadística
E5	Uso la Estadística para resolver problemas de la vida cotidiana
E2	La Estadística ayuda a entender el mundo de hoy
E24	La Estadística ayuda a tomar decisiones más documentadas
E25	Evito las informaciones Estadísticas cuando las leo
	ESCALA DE CAZORLA
C40	La Estadística es una de las materias que yo realmente gusto de estudiar en la universidad (complementación)
C29	La Estadística es fascinante y divertida

Comentarios Finales

Este estudio nos permite visualizar más directamente cuales son las actitudes evaluadas por los participantes como positivas y negativas hacia la Estadística a partir de la evaluación con instrumentos válidos y confiables. Consideramos que el estudio de los aspectos afectivos, en este caso ilustrado por las actitudes, puede contribuir a la mejora tanto de la enseñanza como del aprendizaje de la Estadística, si son considerados como factores que si pueden influir en el adecuado desenvolvimiento tanto de maestros como de alumnos, al mismo tiempo que pueden ser orientados de manera positiva para un óptimo desarrollo académico.

Referencias

Aparicio, Ana y Bazán, Jorge (2005). "Actitud y rendimiento académico en profesores que cursan una asignatura de Estadística en la complementación académica en Perú". Décimo Novena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME). Montevideo. Uruguay. Articulo sometido.

Bazán, J. (2003). Estadística Educativa. Facultad Pontificia y Civil de Lima: Perú

Cazorla, I., Silva, C., Vendramini, C. & Brito, M. (1999a). Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à Estadística. En: *Anais da Conferência Internacional: Experiências e perspectivas do ensino de Estadística, desafios para o século XXI.* (pp.45-58). PRESTA. Florianópolis.

Estrada, A.; Batanero, C.; y Fortuny, J. (2003). Actitudes y Estadística en profesores en formación y en ejercicio. *27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operat*iva. Lleida, 8-11 de abril. España.

UN RECURSO DIDACTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN NIVEL SECUNDARIO: EL ORIGAMI[1]

Jesús Victoria Flores Salazar[2]

Resumen
El presente trabajo muestra mi experiencia como profesora de matemática en la utilización del Origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría en los primeros años de educación secundaria, específicamente en primero y tercero de secundaria. El Origami puede ser empleado como recurso didáctico motivador o como reforzador para lograr un aprendizaje significativo. En mi caso lo utilizo indistintamente, por ejemplo en los grados iniciales de secundaria es un recurso motivador y en otro nivel de secundaria es un recurso motivador y reforzador a la vez.
Los resultados que vengo obteniendo en la enseñanza de la geometría con este arte-recurso, como yo personalmente lo defino son realmente sorprendentes y motivadores tanto para los alumnos como para mí. En este trabajo se reporta resultados obtenidos en el sexto grado de primaria.

Palabras clave: Origami, Enseñanza de la geometría, recursos didácticos

Objetivos
- Presentar el uso del Origami como un recurso didáctico para la enseñanza de la geometría, fácil de manejar en cualquier realidad en la que se tenga que trabajar considerando contenidos e indicadores de logro del trabajo que realizo en sexto grado.

---

[1] Socialización de experiencias
[2] Master en Matemáticas. Newton College, floressalazar@hotmail.com

- Presentar indicadores de logro del uso del Origami para incentivar a los estudiantes a aprender conceptos geométricos nuevos de una manera entretenida.

Metodología

Los materiales para desarrollar actividades usando Origami son:

- Papel de Origami (cuadrados perfectos de diferentes tamaños y colores).
- Tijeras para cortar el papel (si fuera necesario)
- Superficies planas y amplias (mesas).

Los Indicadores de logro que se pueden obtener son los siguientes:

- Reconoce el desplazamiento de una figura en el plano.
- Identifica figuras geométricas y sus elementos.
- Interpreta la rotación de una figura en el plano.
- Distingue las características de una rotación.
- Encuentra el sentido positivo o negativo que tiene diferentes rotaciones dadas.
- Reconoce las características de una simetría.
- Identifica los ejes de simetría en un patrón dado.
- Discrimina el eje de simetría de diferentes figuras.
- Construye figuras en las que se puedan encontrar ejes de simetría.
- Comprueba que la cantidad de ejes de simetría y rotaciones se relacionan con el número de lados de diferentes polígonos regulares.

En el siguiente cuadro se propone contenidos del trabajo que realizo en sexto grado utilizando Origami.

Cuadro 1.Contenidos del trabajo con Origami en sexto grado

Contenido conceptual	***Contenido procedimental***	***Contenido actitudinal***
Concepto de espacio, distancia y rotación de una figura. Figuras geométricas. Concepto de rotación. Sentido positivo y negativo de la rotación. Elementos y notación. Concepto de simetría.	– Reconocimiento de la posición de un objeto o figura en el espacio relacionándolo con el mismo y con otros puntos de referencia. – Construcción de figuras geométricas básicas y explicación de los procedimientos realizados. – Reconocimiento de cómo rota una figura sobre un punto fijo. – Reconocimiento de los elementos de una rotación. – Construcción de figuras simétricas. – Identificación de los ejes de simetría de diferentes figuras.	Satisfacción por reconocer la posición de un objeto en el espacio. Interés por identificar formas geométricas de su entorno. Interés por construir diferentes figuras geométricas. Interés por solucionar situaciones diversas que se presentan en la vida real.

Resultados

Los resultados que hemos identificado en nuestros alumnos son:

- Se pudo observar que con la manipulación de papel aumento el interés de los alumnos en la geometría por que se construyeron más modelos que los inicialmente previstos.
- Se propició el aprendizaje de conceptos matemáticos y el desarrollo de habilidades relacionadas a estos, por ello las actividades que se diseñaron fueron dirigidas hacia el aprendizaje a través de la construcción, la observación, el análisis y la investigación de situaciones interesantes o sorprendentes para el alumno.
- Los alumnos utilizaron técnicas que les permitieron desarrollar actividades centradas en construcciones de la geometría euclidiana (mediante dobleces básicos pudieron observar concretamente conceptos geométricos elementales como: punto, recta, rectas paralelas, ángulo etc.) ejes de simetría, polígonos, (grupos de sexto grado) y técnicas que les permitieron la construcción de sólidos geométricos.
- Con la construcción de poliedros pudiendo relacionar el número de caras, aristas y vértices y de esta manera hicieron por ejemplo un primer acercamiento al a la formula de Euler (el grupo de segundo y tercero).
- Se logro un “Aprendizaje esquemático” a través de la repetición de acciones. Para lograr un resultado exitoso el alumno debió observar cuidadosamente y escuchar atentamente las instrucciones específicas que luego llevo a la práctica. Es decir, los logros del alumno dependieron más de la actividad en sí que del profesor.
- Se motivo la creatividad del estudiante para desarrollar sus propios modelos y propicio la interrelación de la matemática con el arte.
- A través de Origami los alumnos utilizaron sus manos para seguir un conjunto específico de pasos en secuencia, produciendo un resultado visible que es al

mismo tiempo llamativo y satisfactorio. Los pasos se llevaron a cabo en cierto orden para lograr el resultado exitoso esto les permitió desarrollar su pensamiento lógico-matemático. Piaget sostenía que: “la actividad motora en la forma de movimientos coordinados es vital en el desarrollo del pensamiento intuitivo y en la representación mental del espacio”.

Referencias

Ehloe, W. and Evans, K. (1993). Bringing Constructively into the Classroom," University of Minnesota.

Humiaki H. (1992). Understanding Geometry through Origami Axioms" in the *Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91)*, J. Smith ed., British Origami Society, 1992, pp. 37-70.

Alperin, R. C. (2000). A mathematical theory of origami constructions and numbers. *New York Journal of Mathematics*, 6, 119-133.

Páginas

http://www.uaq.mx/matematicas/origami/index.htlm
http://www.mat.unb.br/~lucero/orig.html
http://hverrill.net/pages~helena/origami/
http://www.paperfolding.com/math/

UNA ACTIVIDAD DIDÁCTICA PARA LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE RECTA USANDO CABRI EN NIVEL UNIVERSITARIO[1]

María del Carmen Bonilla[2]

Resumen

Se propone una actividad didáctica para alumnos del curso de matemática 1 del nivel universitario con el propósito de comprender los conceptos básicos de geometría analítica: distancia entre dos puntos, pendiente de una recta, y la recta como lugar geométrico.
La concepción matemática que nos guía es la planteada por Imre Lakatos, con su carácter cuasi-empírico, centrándonos en el paso de lo concreto a lo abstracto en la acción. Para ello se hará uso de archivos de Cabrí Géomètre que permiten la articulación dialéctica de los lenguajes: geométrico, aritmético y algebraico, y uso de un diseño de actividades de clase basado en el estilo pedagógico centrado en el alumno.

*Palabras claves***:** Cabrí, recta, lenguajes matemáticos, matemática universitaria, Lakatos

Objetivos

Presentar una propuesta didáctica a través de un diseño de actividades, para construir los conceptos de distancia entre dos puntos, pendiente de una recta y la recta como lugar geométrico, en el nivel universitario, empleando el programa Cabrí Géomètre.

---

[1] Socialización de experiencias

[2] Estudiante de la Maestría en Enseñanza de la Matemática. mc_bonilla@hotmail.com. Bachiller en Educación Matemática. Trabaja en estudios de medición para el Fondo para el Desarrollo Agrario.

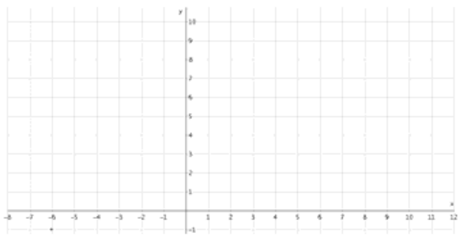
Metodología

Para desarrollar la propuesta vamos a desarrollar básicamente dos aspectos: el estilo pedagógico centrado en el alumno y la utilización de recursos informáticos en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Para lograr esto se sugiere un diseño de actividades de clase en donde el alumno desarrolla tareas con una metodología heurística, pues a través de ella los hechos concretos se generalizan por medio del descubrimiento. En las actividades se utilizan archivos Cabrí que permiten la articulación de los lenguajes geométrico, aritmético y algebraico, pues es a través del movimiento que se visualiza como los objetos geométricos desplazados generan la variabilidad en el número, que al ser generalizados se expresan en un lenguaje algebraico.

Actividad

Parte 1: Distancia entre dos puntos

1. En el plano de ejes cartesianos ubica los puntos A(5,8) y B(10,2). Sin usar la regla, utilizando líneas auxiliares si crees conveniente, y utilizando tus conocimientos, calcula la distancia entre los dos puntos, escribiendo paso a paso el proceso utilizado.



Ahora, utilizando el proceso aplicado anteriormente, encuentra una fórmula que te permita hallar la distancia entre los puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$.

D(P,Q) = ________________________________

2. En seguida, ingresa al Programa Cabrí-Géomètre II.

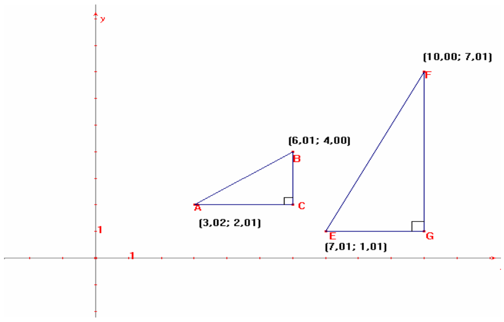
a) Abre el archivo "**Distancia entre dos puntos**". Desplaza los puntos A y B en el plano y observa como, en todos los casos podemos hallar la distancia entre ellos. ¿Qué teorema estamos utilizando para hallar la distancia entre los dos puntos? ________________________

Escribe la fórmula que observas en el archivo para los puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$. ________________________

b) Ubica el comando *Distancia y longitud*. Con la manito haz clic en el punto A y en el punto B. Haz hallado la distancia entre los dos, y comprobado si coincide con la fórmula.

Parte 2: Pendiente de una recta

1 Observa los dos triángulos de la siguiente figura. Escribe las coordenadas de los puntos C y G en el plano de ejes cartesianos**.**



Llena los datos que te piden en la tabla siguiente:

Triángulo	**ABC**	**EFG**	**Diferencia entre las dos distancias**
Distancia de →(elevación)	C a B =	G a F =	
Distancia de →(recorrido)	C a A =	G a E =	

a) ¿Cómo podrías hallar la inclinación (relación entre elevación y recorrido) del lado AB de ABC, y la inclinación del lado EF de EFG, teniendo en cuenta los datos de la tabla anterior?

____

b) ¿En cuál de ellos la inclinación es mayor? ____________

c) La inclinación que haz hallado es la pendiente del segmento. Recordando lo que has estudiado en Trigonometría, ¿Esa relación entre la elevación y el recorrido, es similar a que relación estudiada?

____

d) Entonces podemos afirmar que la pendiente de un segmento es igual a ____________________________

2. A continuación ingresa al Programa Cabrí. Abre el archivo "Pendiente de la recta". Coge cada uno de los puntos y desplázalos a lo largo de la recta.

a) ¿Qué podrías afirmar sobre la pendiente de la recta y los ángulos del triángulo? ____________________________

b) ¿Qué justificación geométrica explica estas observaciones?

____

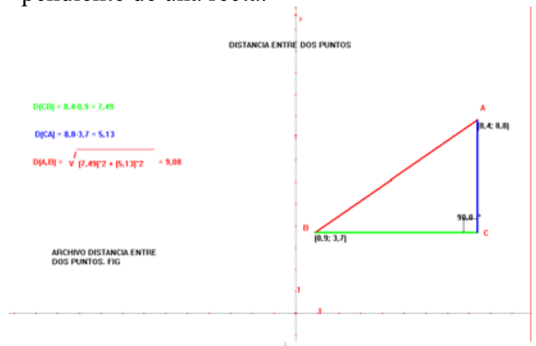
c) Libera los puntos D y E, con el comando Fijar-Liberar. Cogiéndola en el primer cuadrante, desplaza la recta L lentamente sobre el plano, observa lo que sucede con el valor de la pendiente y llena las siguientes tablas siguiendo las indicaciones:

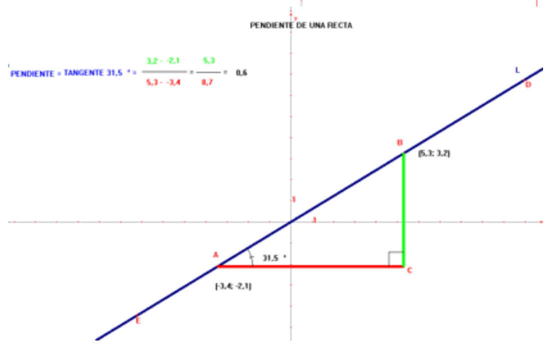
Recta L en el primer cuadrante	Hacia la izquierda	Sobre el eje y	Hacia la derecha	Sobre el eje x
Valor de pendiente				

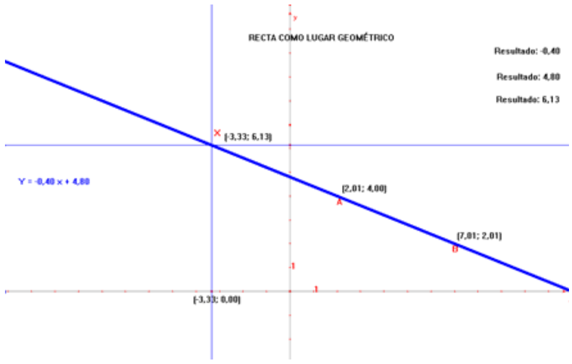
Valor del ángulo				

Recta L	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
Signo de la pendiente				

d) Considerando a los puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$, escribe la fórmula que observas en el archivo para hallar la pendiente de una recta.







Referencias

Montoya, E. (2005). Generación de modelos de enseñanza – aprendizaje en el álgebra lineal. Obtenido en junio 10, 2005, de http://www.iberomat.uji.es/carpeta/com.htm

Stewart, J. (2001). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. México: Internacional Thomson Editores.

Lakatos, Imre (1978). *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza.