

## NOCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ESTADÍSTICA EN UNA MUESTRA DE ESCOLARES: UNA APROXIMACIÓN

Jorge Luis Bazán

### **Resumen**

*Se diseñó un instrumento ad hoc para observar experimentalmente la adquisición de la noción de distribución estadística que evalúa la noción de probabilidad. Se aplicó en ocho escolares entre 11 y 16 años. Se identificó seis patrones de respuestas que explican los resultados, así como el incremento de aciertos en la predicción para un segundo ensayo. No se pudo concluir que a medida que avanza la edad la noción de probabilidad se estructura cada vez más cercana a la matemática.*

**Palabras claves:** *Distribución estadística – Escolares.*

### **Summary**

*The author designed an ad hoc instrument to observe acquisition of the notion of statistics distribution that evaluates the notion of probability. Pupils between 11 and 16 ages were the experimental subjects. Six answer – patrons were identified*

**Key words:** *statistics distribution - pupils.*

Es tarea de la psicología caracterizar el desarrollo de los procesos psíquicos involucrados en la aprehensión de los conceptos y nociones útiles para la persona y su actividad.

La investigación psicológica es fuente para la creación de estrategias de enseñanza de conceptos que orienten la actividad del hombre y el desarrollo social. Dentro de estos conceptos el de probabilidad resulta justificadamente útil, toda vez que la incertidumbre es un hecho cotidiano y la probabilidad es una estructura matemática que la aborda objetivamente.

En la educación superior peruana es generalizada la enseñanza de una asignatura de Estadística. Esta incluye un tópico de probabilidad con un nivel formal que varía de acuerdo a la especialidad, sea técnica o universitaria. Pese a ello, al parecer no se ha justificado plenamente su inclusión en las currículas respectivas, así como su relevancia social.

En nuestro país no se ha investigado sobre la enseñanza de la probabilidad en diferentes niveles educativos, así como los procesos cognitivos y cognoscitivos relacionados. Es decir, no se conoce si es posible introducir el concepto de la probabilidad en niveles anteriores a la educación superior.

De acuerdo a Oerter (1975), Piaget y sus colaboradores descubrieron que los niños menores de once años no habían adquirido los conceptos explicativos del azar y la probabilidad.

En experimentos relativos al aprendizaje de la probabilidad en niños, Messick y Solley (citados también en Oerter 1975) encontraron que las diferencias de edad aparecieron cuando se premiaba la apreciación exacta (coincidencia entre la predicción y el resultado).

Los niños mayores intentaban formular sus adivinaciones de forma que obtuviesen las máximas ventajas posibles. El incremento progresivo de las apreciaciones a partir de los 100 primeros intentos demuestra, de acuerdo a Messick y Solley, que se trataba de una estrategia cognoscitiva que habían desarrollado durante la experiencia.

Cohen (1974) divulga una “experiencia” relativa a la noción de distribución estadística con niños de 10 a 16 años, a quienes se mostró un recipiente lleno de canicas azules y amarillas informándoles de su igual número. Un experimentador extrajo del recipiente de modo aleatorio cuatro canicas de cada vez, colocándolas en 16 copas. Posteriormente, los niños fueron interrogados con respecto a cuántas copas contenían respectivamente: cuatro canicas azules, tres azules y una amarilla, dos azules y dos amarillas, una azul y tres amarillas y cuatro amarillas.

Cohen encontró que los niños progresaban aparentemente según cuatro estadios:

- I. Más jóvenes (sobre los diez) : intuían vagamente que las probabilidades de los distintos casos no eran las mismas;
- II. Más maduros: consideraban que el contenido más frecuente (o más probable) de las copas eran el de 2 azules y 2 amarillas;
- III. Se llega a la conclusión de que 1 amarilla y 3 azules aparecían con la misma frecuencia que 1 azul y 3 amarillas.

- IV. Se llega a la conclusión de que 3 de un color y 1 de otro tenían más probabilidad que 4 del mismo color.

Finalmente concluye que “estas experiencias demuestran que a medida que va aumentando la edad y la experiencia, las situaciones inciertas van estructurándose de una forma cada vez más cercana a la objetividad matemática”.

Como se muestra en el estudio que da origen a este reporte Bazán & Aparicio (1994), estos resultados provienen de: “experimentos sobre los que recaen serias dudas y objeciones a la interpretación de los resultados desde el punto de vista de la teoría matemática de la probabilidad”. Por ello nuestro propósito fundamental es replicar la experiencia de Cohen J., en cuanto sea posible, pese a no disponer de las fuentes primarias directas.

En este estudio se aborda la noción de distribución estadística, la cual puede ser entendida como “la idea general de los Ss tienen de los eventos que son determinados por los valores de una variable aleatoria definida en un experimento aleatorio dado, así como la distribución de frecuencias esperada de dichos eventos para un número fijo de repeticiones”. Para los fines de este estudio son importantes el reconocimiento de una relación de orden en las frecuencias de los eventos y la igualdad de frecuencias de eventos “simétricos”. Esta propuesta se constituye en una manera sutil de abordar el concepto de probabilidad experimentalmente.

### **Definición de variables**

V. Dependiente : Noción de Distribución Estadística.

V. D1 :Distribución de frecuencias de los eventos posibles de la variable aleatoria.

V. D2 : Orden prevalente determinado por las frecuencias obtenidas para los valores de la variable aleatoria.

V. Independientes: Edad de los sujetos

V. Controladas :

- Reconocimiento del material experimental;
- Reconocimiento del número de sucesos por evento.
- Reconocimiento de los eventos posibles correspondientes a la variable aleatoria.

### **Metodología**

El método empleado es analítico inductivo, se basa en la contrastación de un modelo matemático que actúa como norma y de resultados empíricos obtenidos al presentar a los sujetos el problema matemático de modo experimental; para ello se diseñó un procedimiento experimental ad hoc y una hoja de registro estructurada que recoge las respuestas de los sujetos.

Este método ha sido empleado con relativo éxito en el estudio de los modelos de Teoría de Juegos abordados experimentalmente, como por ejemplo: el dilema del prisionero que puede verse en Coombs; Dawes y Tversky (1988).

**El problema matemático**

Sea una caja con 32 chapas negras (32 N) y 32 chapas rojas (32R) en ella. Si se toman las chapas aleatoriamente de 4 en 4 y sin reemplazo (sin devolverlos a la caja) y se distribuyen en 16 vasos obsérvese el número de de chapas rojas contenidas en un vaso.

Defínase la variable aleatoria, calcúlese el número esperado de vasos para cada evento que se corresponde con los valores que toma dicha variable aleatoria, y orden las probabilidades correspondientes de la mayor (orden 1) a la menor ( en orden ascendente)

*Solución:*

Haciendo uso de la interpretación clásica de la probabilidad tendremos:

Variable aleatoria

X: número de chapas rojas contenidas en un vaso.

X: 0, 1, 2, 3, 4

Tabla 1: Identificación de los eventos

<b>X</b>	<b>EVENTOS</b>
4	4R
3	3R1N
2	2R2N
1	1R3N
0	4N

Tabla 2: Modelo Normativo para la Distribución Estadística

<b>X</b>	<b>EVENTOS</b>	<b>RESULTADOS*</b>
4	4R	1
3	3R1N	4
2	2R2N	6
1	1R3N	4
0	4N	1

\*: Las definiciones matemáticas así como el cálculo pueden revisarse en Bazán y Aparicio (1994). Resultado esperado, correspondiente a la distribución estadística haciendo uso de la probabilidad clásica.

Tabla 3: Modelo Normativo para el Orden y Simetrías.

<b>X</b>	<b>EVENTOS</b>	<b>ORDEN**</b>
4	4R	3
3	3R1N	2
2	2R2N	1
1	1R3N	2
0	4N	3

\*\* : Ordenado de acuerdo a su probabilidad, de la mayor a la menor. Obsérvese los dos empates

N: chapas negras

R: chapas rojas

### **Muestra**

Estuvo conformada por ocho escolares entre 11 y 16 años, de ambos sexos provenientes de una muestra circunstancial, en la ciudad de Chimbote.

Tabla 4: Características de los Sujetos Sexo: Femenino

<b>SUJETO</b>	<b>NOMBRE</b>	<b>EDAD</b>	<b>AÑO ESCOLAR</b>
1	Marcia	11	6° primaria
2	Miroslava	13	1° secundaria
3	Aurora	14	3° secundaria
4	Maritza	15	4° secundaria

Tabla 5: Características de los Sujetos Sexo: Masculino

<b>SUJETO</b>	<b>NOMBRE</b>	<b>EDAD</b>	<b>AÑO ESCOLAR</b>
1	Abraham	11	1° secundaria
2	Pablo	12	1° secundaria
3	Daniel	15	4° secundaria
4	Juan	16	3° secundaria

### **Aparatos e Instrumentos**

Se utilizó una caja de cartón forrada con papel lustre de color amarillo, con 29 cm. X 17 cm. y 18 cm. de alto; 64 chapas forradas con papel lustre por dentro y por fuera con un solo color: 32 rojas y 32 negras; 16 vasos medianos de tecnopor de color blanco; pizarra de color verde de 1.2 mt. X 1 mt.; tizas; hojas de registro estructurada y lápiz (ver gráfico 1).

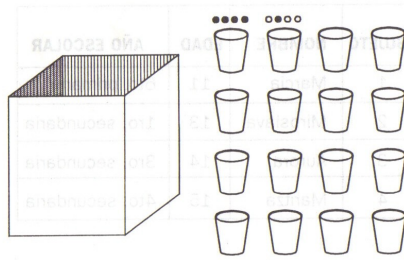


Grafico 1. Material experimental

Material experimental utilizado: una caja 16 vasos y 64 chapas.

Los experimentos se llevaron a cabo en el interior de un CEI. Una de sus aulas de 4 x 8 mt. Fue acondicionada adecuadamente: con una mesa, tres sillas y una pizarra, como se observa en el siguiente gráfico.

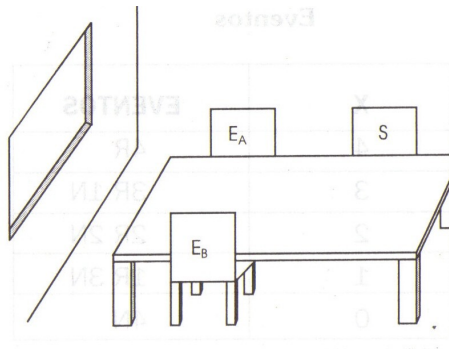


Grafico 2. Ambiente experimental

### **Procedimiento experimental**

El E<sub>A</sub> explica al sujeto las actividades a realizar, de la siguiente manera:

“Vamos a realizar una experiencia, te voy a hacer algunas preguntas sobre ella después, así que quiero que prestes atención a lo que hago y sigas las instrucciones que voy a darte”.

### **Reconocimiento del material experimental**

1. “Primero quiero q conozcas los materiales que vamos a emplear”.

El S manipula el material experimental: una caja color amarillo, 32 chapas rojas, 32 chapas negras y 16 vasos blancos no transparentes.

### **Reconocimiento del número de chapas por vaso**

2. El E<sub>A</sub> en una pizarra realiza la división de  $64/16=4$  explicando. “Hay 64 chapas y 16 vasos, entonces va a ver  $64/16= 4$  chapas en cada vaso ¿de acuerdo?” (el E<sub>B</sub> borra la pizarra luego).

### **Reconocimiento de los eventos posibles**

3. El E<sub>A</sub> interroga al sujeto sobre los eventos posibles (“posibilidades”) que se obtienen al elegir las cuatro chapas dadas por las combinaciones de los dos colores de éstas, luego coloca e la pizarra, en un lugar visible, dichos eventos en el orden siguiente: 4R 3R 1N 2R 2N 1R 3N 4N.

“¿Qué colores pueden salir en un vaso? ..., ¿qué otro? ..., ¿ qué otro? ..., ¿qué otro? ..., ¿ qué otro?...”

En caso de que el S no reconozca dichos eventos, explicarlos.

### **Distribución de las chapas por vaso**

4. El E<sub>A</sub> introduce las chapas en la caja y distribuye los 16 vasos en 4 filas y 4 columnas (no es indispensable), luego revolotea la caja y comienza a distribuir las chapas de 4 en 4 en los 16 vasos.

“Voy a introducir todas las chapas en la caja, voy a revolotear ka caja y después las voy a sacar de 4 en 4 y colocarlas en los 16 vasos”. Se hace esto sin mirar y cuidando de que el S no observe al interior de la caja y los vasos.

### **Primera experiencia**

5. El E<sub>A</sub> interroga al S en el orden siguiente respecta a la distribución de los colores.

- a) ¿En cuántos vasos hay 4 chapas rojas?
- b) ¿En cuántos vasos hay 3 chapas rojas y 1 chapa negra?
- c) ¿En cuántos vasos hay 2 chapas rojas y 2 chapas negras?
- d) ¿En cuántos vasos hay 1 chapa roja y 3 chapas negras?
- e) ¿En cuántos vasos hay 4 chapas negras?

El E<sub>B</sub> escribe en la pizarra las respuestas al costado de los eventos escritos anteriormente usando tiza de color. También anota en su hoja de registro.

6. El E<sub>A</sub> vacía los vasos e inicia el conteo de los vasos para cada evento.  
“Voy a vaciar los vasos y vamos a contar los colores que salen en ellos”.  
EL E<sub>B</sub> coloca los resultados al costado de las respuestas del sujeto con tiza común. También anota en su hoja de registro.
7. El E<sub>A</sub> interroga al sujeto a través de una pregunta libre “¿Por qué tus resultados son diferentes de los que hemos encontrado?”. El E<sub>B</sub> anota el diálogo espontáneo.

### **Segunda experiencia**

8. El E<sub>A</sub> repite la experiencia mencionado:  
“Vamos a hacerlo de nuevo”. Procede como los pasos 5, 6 y 7.

### **Tercera experiencia**

9. El E<sub>A</sub> interroga al sujeto:  
“¿Quieres que lo hagamos de nuevo?”  
Si el S accede se repite los pasos 5, 6 y 7.

### **Reconocimiento de las probabilidades asociadas a los eventos (frecuencia)**

10. El E<sub>A</sub> interroga al sujeto de la siguiente manera:

“Bien finalmente vamos a dar un orden a los eventos (posibilidades) ¿cuál de los cinco eventos ocurre más veces?... ¿Después?... ¿después?... ¿después?... ¿después?...”

El E<sub>B</sub> anota en su hoja d registro.

11. El E<sub>A</sub> interroga al sujeto, libremente, si es el caso a partir de “¿Cómo llegaste a esa respuesta?”

El E<sub>A</sub> anota el diálogo espontáneo.

### **Identificación de variables (definición operacional)**

Las variables pueden ser reconocidas, de acuerdo al procedimiento experimental ad-hoc, como:

V.D1 : Distribución de las chapas en los vasos en la primera y segunda experiencia (pasos 5, 6, 7 y 8).

V.D2 : Reconocimiento de las probabilidades asociadas a los eventos (paso 10).

Asimismo las variables controladas:

- Reconocimiento del material experimental (paso 1).
- Reconocimiento del número de chapas por vaso (paso 2).
- Reconocimiento de los eventos posibles (paso 3).

### **Resultados**

De acuerdo al procedimiento experimental ad-hoc utilizado y al método empleado, consistente en la contratación de las respuestas de los sujetos (procedimiento empírico) y el modelo matemático (modelo normativo) se presentan los resultados en base a los aciertos obtenidos por los Ss.

En primer lugar, debido a que el mecanismo de aleatorización manual no fue el adecuado, para la primera y segunda experiencia un acierto se define como la coincidencia entre las predicciones de los sujetos y los resultados al vaciar los vasos, es decir, la distribución “observada” (pasos 5, 6, 7 y 8) por lo que no se hizo uso de la Tabla 2 (distribución “verdadera”). A continuación se presenta los cuadros de aciertos de los Ss para la primera y segunda experiencia de acuerdo a los eventos posibles del experimento aleatorio.

De las tablas 6 y 7 se observa que los aciertos de los Ss de sexo femenino (f) y masculino (m) no son diferentes. Para la segunda experiencia, en ambos grupos, los aciertos se duplicaron con respecto a la primera (18 a 9) es decir, los aciertos se incrementaron en un 100%.

Los Ss que más acertaron en ambos intentos son: S2(f) con 6 aciertos (5 de ellos en el segundo intento), S4 (m) con 5 aciertos y S3 (f) con 4 aciertos. Por otro lado el S1 (f) no obtuvo ningún acierto con ambos intentos. Asimismo los eventos acertados variaron entre la primera y segunda experiencia.



En segundo lugar, para el caso del orden asignado por los Ss, un acierto se define como la coincidencia entre las estimaciones de los Ss (paso 10) y el modelo normativo (tabla 3).

Tabla 6: Aciertos en los sujetos en la primera experiencia

<b>Sujetos</b>											
Sexo: Femenino						Sexo: Masculino					
<b>X</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>Tot</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>Tot</b>	<b>TOT</b>
4	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	2
3	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	2
2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	2	3
<b>TOT</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>9</b>

0: desacierto (la predicción no coincide con el resultado)  
1: acierto (la predicción coincide con el resultado)

Tabla 7: Aciertos en los sujetos en la segunda experiencia

<b>Sujetos</b>											
Sexo: Femenino						Sexo: Masculino					
<b>X</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>Total</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>Total</b>	<b>TOTAL</b>
4	0	1	0	0	1	1	0	0	1	2	3
3	0	1	1	1	3	0	1	1	0	2	5
2	0	1	0	0	1	1	0	0	1	2	3
1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	3	4
0	0	1	0	1	2	0	1	0	0	1	3
<b>TOT</b>	<b>0</b>	<b>5</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>8</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>10</b>	<b>18</b>

0: desacierto (la predicción no coincide con el resultado)  
1: acierto (la predicción coincide con el resultado)

Tabla 8: Orden asignado por los sujetos a los eventos

<b>Sujetos</b>											
Sexo: femenino						Sexo: masculino					
<b>X</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>ORDEN *</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>ORDEN**</b>	<b>TOT</b>
4	4	4	4	2	0	5	5	3	3	2	2
3	3	2	1	1	1	3	1	2	1	1	2
2	1	1	3	1	3	1	2	1	2	2	5
1	2	3	2	1	2	2	3	2	1	2	4
0	5	5	5	2	0	4	4	3	3	2	2
<b>SIME**</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>9</b>	<b>15</b>
<b>TOTAL</b>					<b>2</b>					<b>4</b>	<b>6</b>

\* Se contabiliza los aciertos al contrastar con la tabla 3, es decir el número de órdenes asignados correctos. Esto se muestra en las columnas quinta, décima y onceava del interior del cuadro y se

obtiene de una lectura a lo largo de cada fila correspondiente a los eventos y según los sujetos. Se ofrece totales, parciales y gran total de órdenes correctos para la muestra.

\*\* Se contabiliza los aciertos al contrastar con la tabla 3, es decir el número de simetrías asignadas correctas. Esto se muestra en las filas sexta y séptima al final del interior del cuadro y se obtiene de una lectura a lo largo de cada columna correspondiente a los sujetos y según los eventos. Se ofrece totales parciales y el gran total de simetrías correctas para la muestra.

De la tabla 8 se observa que salvo el S3 (f) y el S2 (m) los demás.

Reconocieron el evento 2R2N como el más frecuente. Sólo los Ss: S4 (f), S3(m) y S4 (m) reconocieron que 3R1N y 3N1R son simétricos de igual frecuencia, pero sólo S3 (m) les dio el orden 2 que es el correcto. Para los otros Ss dichos eventos no son simétricos pero sí le otorgan órdenes menores que los dados a 4R y 4N, es decir de mayor frecuencia que estos.

Los eventos 4R y 4N son los eventos menos frecuentes para todos los Ss, pero sólo S3 (m) y S4 (m) les otorgaron el orden correcto así como reconocieron que son simétricos de igual frecuencia, S4 (f) también reconoció que son simétricos de igual frecuencia pero no les dio el orden correcto.

Se observa que los de menor edad tanto en los grupos femenino y masculino: S1 y S2 en ambos casos, y S3 (f) también otorgaron un orden diferente para cada evento (no reconocen eventos simétricos), por lo que establecen 5 órdenes, s3 (m) y S4 (m) si establecen sólo 3 órdenes siendo el del S3 (m) el correctos; S4 (f) otorga sólo 2 órdenes a los eventos y postula la igualdad de frecuencias de 3R1N, 2R2N y 3N1R.

En tercer lugar, de acuerdo a una interpretación analítica de las repuestas de los Ss contenidas en las hojas de registro correspondientes, y en base a los otros resultados ya presentados, en este estudio se ha encontrado seis esquemas de respuesta en los Ss, lo que a continuación se presentan:

1. El S no establece diferencias sistemáticas en la distribución de frecuencias de los eventos.  
Respuesta al azar (no cumple la igualdad de frecuencias de los eventos simétricos).
2. El S no establece diferencias en la distribución de frecuencias de los eventos.  
Los eventos presentan frecuencias similares: son igualmente probables.
3. El S reconoce que 4R y 4N (pureza) son eventos de menor frecuencia pero no presentan igual frecuencia entre si.
4. El S reconoce que 4R y 4N (pureza) son eventos de menor frecuencia y presentan igual frecuencia entre sí.
5. El S reconoce que 3R1N y 1R3N (mezcla cuasipura) son eventos de mayor frecuencia que los puros y presentan igual frecuencia entre si.
6. El S reconoce que 2R2N es el evento más frecuente de todos los presentes.

Siguiendo estos patrones de respuestas o esquemas, los Ss de la muestra presentaron en su primera y segunda experiencia lo siguiente: (ver Tabla 9)

Observación: No olvidemos que la respuesta o estimación que se ajusta al modelo normativo (tabla 3) en términos de los esquemas presentados sería 4 – 5 – 6.

Tabla 9: Esquemas de respuestas en los sujetos

SUJETOS	Primera Experiencia		Segunda Experiencia	
	FEMENINO	MASCULINO	FEMENINO	MASCULINO
1	1	2	3 - 5 - 5	3 - 6
2	1	4	3 - 6	3 - 6
3	2	6	2	3 - 5
4	3	4 - 6	4 - 6	3

De la tabla 9, contrastando los esquemas de respuestas de los Ss para ambas experiencias, puede ofrecerse la siguiente interpretación por S:

Sexo femenino:

S1 : mejoró significativamente su estimación.

S2 : mejoró su estimación.

S3 : no mejoró su estimación. La mantuvo. Pueden recordarse los efectos de la no aleatorización.

S4 : mejoró su estimación, no influyó el resultado obtenido al vaciar los vasos de la primera experiencia (no aleatoria).

Sexo masculino:

S1 : mejoró su estimación.

S2 : no mejoró su estimación, pero la amplió.

S3 : no mejoró su estimación, pero la amplió.

S4 : no mejoró su estimación.

En algunos casos uno puede preguntarse si es que las estimaciones mejoraron en un segundo intento, y en el grupo femenino esto es cierto pero en el grupo masculino no necesariamente. ¿Influyen los resultados de la distribución observada en el segundo intento?

Al iniciar la discusión de los resultados se presenta una interpretación del procedimiento experimental ad-hoc.

### Discusión

Cuando sobre un fenómeno aleatorio (experimento aleatorio) se intenta una predicción (estimación), el cálculo de la probabilidad se refiere al cálculo de las posibilidades con las que sucederá ciertos eventos ya establecidos del espacio muestral; pero no garantiza que suceda de ese modo (como el cálculo establece), sólo se tiene un valor “esperado” o “posible” dada la información que se dispone.

Por lo tanto no se calcula que suceda un evento particular sino de que modo (con que probabilidad o frecuencia) éste podría ocurrir dado el conjunto de otros posibles eventos relativos al experimento. Esta es puesta a interpretación probabilística de un experimento aleatorio.

Si se interroga a un sujeto sobre la distribución de vasos (distribución de frecuencias) correspondientes a los eventos definidos, puede suponerse, bajo condiciones establecidas, que el sujeto en su primer intento (experiencia 1)

“adivinará” la falta de un criterio y de experiencia. Por lo tanto ¿qué efectos ejerce el resultado obtenido al vaciar los vasos?

El contraste de las predicciones iniciales con la distribución “observada” (resultados al vaciar los vasos) puede ejercer o no influencia en las respuestas de los sujetos. En ciertos casos, posiblemente los menores, al parecer no; en otros casos posiblemente los mayores, el sujeto interrogado sobre las diferencias entre sus predicciones y los resultados al vaciar los vasos, al parecer atribuirá explicaciones mágicas (animistas), o intentará formular leyes lógicas generalizables a partir de los experimentos por él sugeridos.

En un primer intento (experiencia 1): dada la predicción inicial  $P_1$  y el resultado al vaciar los vasos (distribución observada)  $r_1$ , puede definirse una probabilidad de acierto ( $p_1 = r_1$ ), puesto que son cinco los eventos, el número de aciertos puede resultar influyente en posteriores predicciones. Sin embargo, como se ha encontrado en este estudio, estos aciertos han estado determinados no sólo por las predicciones de los Ss ( $p_1$ ) sino por la aleatoriedad del experimento ( $r_1$ ) ligado al mecanismo aleatorio, como puede recordarse en el caso S3 (f) y S4 (f).

En un segundo intento (experiencia 2) el S puede organizar su predicción en base a ( $p_1=r_1$ ), es decir ( $P_2 / P_1 = r_1$ ), lo cual nos podría llevar a una interrogación desde el punto de vista de la probabilidad condicional. Nuevamente el contraste puede llevar a definir una probabilidad de acierto ( $p_2 = r_2$ ) y en cuyo caso puede ocurrir una desestimación de sus predicciones iniciales.

El procedimiento experimental prevee que si se presenta algunas dudas en las experiencias anteriores, el S tenga la oportunidad de ejecutar un tercer intento (experiencia 3).

Finalmente en el paso 10 el S es invitado a abstraer los aciertos obtenidos de contrastar sus predicciones y los resultados (distribuciones observadas o encontradas). Es decir a estimar. Con esto lo que se pretende es que dada una experiencia  $A_1$  y una experiencia  $A_2$ , entonces en una experiencia  $A_n$  se espera que los eventos se distribuirán estadísticamente del modo verdadero de acuerdo a la objetividad matemática (modelo normativo). Este tipo de pensamiento al que podemos denominar estadístico (para diferenciarlo del denominado matemático) no es determinístico la concatenación lógica, es decir se hubiera tenido: dado A y B entonces C (A,B) : (dada la experiencia A y la experiencia B entonces C ocurre en función de ellas), muy típico del paradigma experimental. Lo que se tiene en cambio, reiteramos, es dado  $A_1$  y  $A_2$  ocurre independientemente de  $A_1$  y  $A_2$ , pero tan aleatoria como ellas.

El experimento ejecutado contiene este modelo conceptual, el cual reconocemos parece ser aún no muy generalizado. Podemos adelantar aquí ¿Qué características tiene este pensamiento? ¿Qué relación presenta con el inductivo? ¿Es posible introducir una interpretación bayesiana de la probabilidad para explicar este proceso cognitivo?.

Es oportuno mencionar aquí, que de acuerdo a Valencia y Suárez, (1988) respecto a la interpretación del concepto de probabilidad existen varias corrientes de

pensamiento que han dado lugar a diversas definiciones de la probabilidad: clásica, frecuentista, psicológica, subjetiva pura y personal (Pág. 454), para una mayor información se sugiere revisar Ayer (1974); Carnap (1974) y Savage (1972).

Con respecto a los esquemas de respuestas encontradas, estos difieren de los encontrados por Cohen (ya citado), en la secuencia de aparición: así 2R2N parece ser un logro último y no como postula Cohen (en un segundo estadio). Sin embargo nuestros resultados no son contundentes, el mecanismo de aleatorización y las características de los Ss no fueron controladas, los que de hecho son influyentes en los resultados obtenidos aquí.

Tampoco hemos encontrado que los estadios propuestos por Cohen se den en una secuencia lineal en los Ss de acuerdo a la edad. Si hemos encontrado por el contrario seis patrones de respuesta de cuyas combinaciones puede interpretarse las predicciones de los Ss.

Por otro lado si analizamos de la menor a la mayor de edad ambos intentos, no encontraremos diferencias claras que nos permitan afirmar que a medida que avanza la edad las predicciones se estructuran de acuerdo a la objetividad matemática, como afirma Cohen (ya citado).

Recordemos que Piaget encuentra que hasta los 11 años no se había adquirido conceptos explicativos del azar. En este estudio se consideraron Ss desde 11 años en adelante, no podemos por lo tanto, corroborar lo mencionado. Como no se realizó la experiencia con Ss de menor de edad no podemos saber si es posible encontrar en ellos conceptos explicativos del azar, asimismo dado el tamaño de la muestra no podemos establecer límites superiores para los niños peruanos.

Recordamos que en Messick y Soller (ya citado), las diferencias de edad aparecen cuando se premia la apreciación exacta (aciertos). En este estudio no se han empleado algún tipo de premio que pudiera corroborar dichos resultados, no sabemos si las estimaciones de Ss hubieran mejorado significativamente de darse dicho caso.

Estos resultados evidencian que la “abstracción” en los Ss a partir de las experiencias 1 y 2: tanto sus predicciones como los resultados (distribuciones observadas al vaciar los vasos), se dá solo en los niños mayores, pero los resultados no resultan concluyentes. Más que afirmar que la edad de los Ss es la que determina estos logros, es preguntarse ¿qué de particular en pensamiento y otras características permiten estos logros que se dan en estos niños?

Los niños con logro en sus predicciones deberían ser investigados en otros aspectos para desentrañar los aspectos cognitivos y cognoscitivos relevantes en la noción de distribución estadística.

Por ello más que extender la muestra a sujetos de mayor edad que la considerada aquí, donde se sabe a priori que algunos fracasarán (resultados académicos en las universidades), es importante investigar en edades menores, como hemos hecho, para identificar las características relevantes de dicho logro tendientes a un diseño de la enseñanza de la probabilidad en la escuela.

Existen muchas interrogantes a plantearse a partir de este estudio de carácter introductorio, estas ameritan un programa de investigación a través de una línea de trabajo multidisciplinario entre educadores, psicólogos y estadísticos matemáticos.

A manera de reflexión permítanos citar finalmente a Resnick y Ford (1990): durante muchas décadas los matemáticos y los educadores que se dedicaban a mejorar el poder intelectual de la enseñanza de las matemáticas fueron incapaces de encontrar nada interesante en la labor de los psicólogos. Esto no es de extrañar, dado que los psicólogos (si es que se dedicaban siquiera a las matemáticas) normalmente único que intentaban era conseguir que los contenidos matemáticos encajasen en las leyes generales de los procesos de aprendizaje, más bien que intentar comprender los procesos particulares del pensamiento “matemático”. (pág. 11)

En este estudio, que resulta pionero en nuestro medio, se ha ejecutado una experiencia piloto con un número pequeño de sujetos con el fin de sugerir valores específicos asignables a las variables estudiadas y definir las posibles relaciones entre ellas. Se ensayó un procedimiento experimental ad-hoc y se sugiere a continuación criterios para un experimento principal a ejecutarse posteriormente.

### **Sugerencias**

En este estudio los Ss variaron en edad, sexo, y condición socioeconómica, puede sugerirse el control de algunas de estas variables independientes. Asimismo se sugiere que se incorporen otros criterios para identificar otras posibles influencias en los resultados tales como: estadio de pensamiento (operatorio formal), características de personalidad (frustración, ansiedad), fluidez verbal, niveles de motivación, habilidades matemáticas (cálculo con proporciones y porcentajes), niveles de percepción de colores; socialización, experiencias formales e informales de trabajo con cantidades y porcentajes (niños que trabajan), condiciones ambientales; lesiones cerebrales, etc.

Los sujetos han sugerido experimentos entre los que se consideran: 16 chapas (8R y 8N); 4 chapas (2R y 2N) con 2 vasos.

Dichos experimentos pueden ser introducidos en sujetos con edades menores a las consideradas aquí, sobre todo el último. Estos experimentos se constituyen en alternativas al propuesto con la salvedad de que los eventos posibles son muy pocos, son de ejecución rápida y pueden ser utilizados en experimentos relativos al aprendizaje.

Se sugiere revisar el estudio que dio origen a este reporte para una mayor comprensión de las secciones de resultados y discusión.

Asimismo la lectura de sus anexos conteniendo las hojas de registro de los sujetos.

### **Referencias**

Ayer, A. (1974). Posibilidad, probabilidad y causalidad, en: matemáticas en las ciencias del comportamiento, Madrid: Alianza Editorial 16-38.

Bazán, J. & Aparicio, A. (1994). Estudio piloto de la noción de distribución estadística: planteamiento y protocolo experimental (Laboratorio de Psicología Experimental UNMSM) 70 pp.

Carnap, R. (1974). ¿Qué es la probabilidad?. En matemáticas en las ciencias del comportamiento, Madrid Alianza Editorial. 39-49.

Cohen, J. (1974). Probabilidad subjetiva, en matemáticas en las ciencias del comportamiento, Madrid. Alianza Editorial, 50-58.

Coombs, C.; Dawes, R. y Tversky, A. (1988). Introducción a la Psicología Matemática, Madrid: Alianza Editorial.

Oerter, R. (1975). Psicología del pensamiento. Barcelona: Herder.

Resnik, L. y Ford, W. (1990). La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Barcelona: Paidós Ibérica y Centro de Publicaciones del Ministerio de educación y Cultura.

Valencia, C. y Suárez, M. (1988). Introducción a los fundamentos de la probabilidad y la estadística. En Mathesis, Filosofía e Historia de las Matemáticas. Noviembre 1988, vol. IV 4, 453-488.

**Anexo**

NOMBRE : Maritza GRADO DE INSTRUCCIÓN : 4° secundaria.  
 EDAD : 15 años COLEGIO : CEP Isaac Newton – Chimbote.  
 SEXO : Femenino COND. SOCIOECONOMICA : Baja.

<p>1. Reconocimiento del material experimental: El S bromea y sonrío mientras ayuda a contar las chapas y pregunta si las chapas son parte del experimento</p>	<p>El S fija su mirada en los resultados.</p> <p>7) El E y el S desarrollan el siguiente diálogo:</p> <p>E: ¿porqué tus resultados son diferentes que las respuestas?</p> <p>S: ¿Cómo qué? (El E repite la pregunta)</p> <p>S: Hay, como voy a adivinar nadie adivina. Algunos tienen más probabilidad como 3R2N y 1R3N.</p> <p>E: ¿Porqué?</p> <p>S: Los otros no tienen bastantes coincidencia, 3R1N y 1R3N es más probable.</p> <p>E: ¿Qué es probable?</p> <p>S: Probabilidad</p> <p>E: ¿Qué es probabilidad?</p> <p>S: Que sea más posible (ríe), no me preguntes yo no sé, el 2° y el 4° tienen más probabilidades.</p> <p>E: ¿Lo hacemos de nuevo?</p> <p>S: Si quieres perder el tiempo (ríe).</p> <p>E: Yo no voy a perder el tiempo.</p>																					
<p>2. Reconocimiento del número de chapas por vaso: El S comprende porque van 4 chapas en cada vaso.</p>																						
<p>3. Reconocimiento de los eventos posibles: El s reconoce los 5 eventos posibles. Opina que las 4R y las 4N serían más difíciles de salir.</p>																						
<p>4. Distribución de las chapas en los vasos: El s se muestra impaciente y mira fijamente al E mientras este va colocando las chapas en los vasos.</p>																						
<p><b>1ra Experiencia</b></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">5)</th> <th style="text-align: center;">6)</th> </tr> <tr> <th>Evento</th> <th>Predicción (p)</th> <th>Resultado (r)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4R</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td>3R1N</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">7</td> </tr> <tr> <td>2R2N</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td>1R3N</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">5</td> </tr> <tr> <td>4N</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </tbody> </table>			5)	6)	Evento	Predicción (p)	Resultado (r)	4R	1	0	3R1N	4	7	2R2N	4	3	1R3N	5	5	4N	2	1
	5)	6)																				
Evento	Predicción (p)	Resultado (r)																				
4R	1	0																				
3R1N	4	7																				
2R2N	4	3																				
1R3N	5	5																				
4N	2	1																				



<p>8) <b>2da experiencia.</b> El disminuye de nuevo las chapas. Pasado un momento el S menciona al E lo siguiente: S: Creo que depende (refiriéndose a que tal o cual chapa salga) de lo que agarre tu mano. Depende de lo que le de la gana a tu mano. No siempre la mano coincide en sacar 4 de un solo color, siempre que estén mezclados hay mayor probabilidad de 3R1N y 1R3N y menor probabilidad que 4R y 4N. E: ¿Cuál es tu conclusión, es por la mano o por la mezcla? S: Creo que por los dos. E: ¿Qué pasaría si lo hiciera una mano perfecta? S: Sólo si viera (hubiera). E: ¿Y si no estuviera la mano? S: igual pues.</p> <p>Se procede a la 2da experiencia</p>	<p>3R1N, 1R3N, 2R2N, tienen mayor probabilidad que 4R Y 4N. Que 4R y 4N tienen la misma probabilidad.</p>																																				
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Evento</th> <th>Predicción (p)</th> <th>Resultado (r)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4R</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>3R1N</td> <td>5</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>2R2N</td> <td>4</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>1R3N</td> <td>5</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>4N</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	Evento	Predicción (p)	Resultado (r)	4R	1	0	3R1N	5	5	2R2N	4	7	1R3N	5	3	4N	1	1	<p>9) Se realiza un experimento con 8 vasos y 16 chapas (8 rojas y 8 negras)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>EVENTOS</th> <th>p</th> <th>r</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4R</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>3R1N</td> <td>2</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>2R2N</td> <td>2</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>1R3N</td> <td>2</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>4N</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> <p>Se realiza el siguiente diálogo: E: ¿Qué piensas de esta experiencia? S: Que a menos vasos hay más probabilidades. E: ¿Cómo cuántos menos vasos? S: Yo no sé. 4 vasos o 32 chapas. E: ¿Qué debe pasar? S: Todos tendrían igual probabilidad. E: ¿Cómo lo vas a hacer? S: (El S empieza a pensar y llega a la conclusión que deberían ser 8 vasos y 32 chapas.</p>	EVENTOS	p	r	4R	1	1	3R1N	2	2	2R2N	2	2	1R3N	2	2	4N	1	1
Evento	Predicción (p)	Resultado (r)																																			
4R	1	0																																			
3R1N	5	5																																			
2R2N	4	7																																			
1R3N	5	3																																			
4N	1	1																																			
EVENTOS	p	r																																			
4R	1	1																																			
3R1N	2	2																																			
2R2N	2	2																																			
1R3N	2	2																																			
4N	1	1																																			
<p>E: ¿Y ahora que pasó? S: ¿Cómo que pasó? E: ¿Qué concluyes con esta segunda experiencia? S: Que todos tienen igual probabilidad. E: Pero tu dijiste que probabilidad significa que ocurriera más. (El S sólo mueve la cabeza) E: ¿Y si dieras un orden? S: No habría porque todos son iguales. (Pero después de su respuesta da el siguiente orden):</p>	<p>10) Reconocimiento de las probabilidades asociadas a los eventos</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>EVENTOS</th> <th>ORDEN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4R</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>3R1N</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>2R2N</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1R3N</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>4N</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table> <p>11) No se continuó porque el S mostraba cansancio.</p>	EVENTOS	ORDEN	4R	2	3R1N	1	2R2N	1	1R3N	1	4N	2																								
EVENTOS	ORDEN																																				
4R	2																																				
3R1N	1																																				
2R2N	1																																				
1R3N	1																																				
4N	2																																				